Exame – Época Normal — 2015–01–22 **Duração:** 2h **Cotação:** 15 valores

1. Justifica a veracidade ou a falsidade das afirmações seguintes (sem usar tabelas de verdade):
   (a) $t \to s, \neg q \to \neg s, s \vdash q$
   (b) $\models (t \to s) \wedge \neg((s \to q) \to (t \to q))$
   (c) $\neg(\phi \to \theta) \vdash \phi \vee \theta$
   (d) Sendo ϕ uma fórmula de lógica proposicional, ϕ é não válida se e só se $\neg\phi$ é satisfazível.
   (e) Seja $\mathcal{L}$ a linguagem de primeira ordem sem igualdade tal que $\mathcal{R}_1 = \{P\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{T\}$. Considera a estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{A})$ de $\mathcal{L}$ com $A = \{1, 2, 3\}$, $T^{\mathcal{A}} = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ e $P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\}$. Então, $\mathcal{A} \models \forall z \exists y(T(y, z) \to P(z))$.

2. Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se esta é ou não é um teorema da lógica de primeira ordem, quaisquer que sejam as fórmulas ϕ e θ. No caso afirmativo, indica uma dedução natural da respectiva fórmula (sem usar a completude). Caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ϕ e θ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ que não seja seu modelo.
   (a) $\forall z \exists w(\phi \vee \theta) \to \exists z \forall w(\phi \wedge \theta)$
   (b) $\forall z(\theta \vee \phi) \to \neg\exists z(\neg\theta \wedge \neg\phi)$

3. Seja $\mathcal{L}_G$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade, sem símbolos funcionais e apenas um símbolo relacional binário, i.e, $R_2 = \{T\}$. Qualquer estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um grafo dirigido, que podemos representar por $\mathcal{G} = (A, E)$ onde A é um conjunto e $E = T^A$. Num grafo dirigido $\mathcal{G} = (A, E)$, um arco $(a, b) \in E$ tem origem no nó $a \in A$. O **grau de saída** de um nó é o número de arcos que têm origem nesse nó.
   (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se todos os nós de $\mathcal{G}$ têm grau de saída pelo menos 3.
   (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg\phi$

4. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade. Mostra que existe um conjunto de proposições de $\mathcal{L}$ cujos modelos são as estruturas de $\mathcal{L}$ com universo infinito (e apenas essas), mas não existe nenhuma proposição nestas condições.

5. Considerando a linguagem de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números obtém uma dedução natural para $\forall z\ 0 \times z = 0$.

	Introdução	Eliminação
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi\wedge\psi}\wedge\mathbf{I}$	$\dfrac{\phi\wedge\psi}{\phi}\wedge\mathbf{E}_1 \qquad \dfrac{\phi\wedge\psi}{\psi}\wedge\mathbf{E}_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi\vee\psi}\vee\mathbf{I}_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi\vee\psi}\vee\mathbf{I}_2$	$\dfrac{\phi\vee\psi \quad \begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\vee\mathbf{E}$
$\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ F\end{matrix}}{\neg\phi}\neg\mathbf{I}$	$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\mathbf{E}$
F	$\dfrac{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \neg\phi\end{matrix}}{F}F\mathbf{I}(*)$	$\dfrac{F}{\phi}F\mathbf{E}$
$\to$	$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\to\psi}\to\mathbf{I}$	$\dfrac{\phi \quad \phi\to\psi}{\psi}\to\mathbf{E}$
$=$	$\dfrac{}{t=t}=\mathbf{I}$	$\dfrac{t_1=t_2 \quad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]}=\mathbf{E}$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em ϕ
$\forall$	$\dfrac{\begin{matrix}[v\\ \quad\vdots\\ \quad\phi[v/x]\end{matrix}}{\forall x\ \phi}\forall\mathbf{I}$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\dfrac{\forall x\ \phi}{\phi[t/x]}\forall\mathbf{E}$ onde x é substituível por t em ϕ
$\exists$	$\dfrac{\phi[t/x]}{\exists x\ \phi}\exists\mathbf{I}$ onde x é substituível por t em ϕ	$\dfrac{\exists x\ \phi \quad \begin{matrix}[v \quad \phi[v/x]]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\exists\mathbf{E}$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Algumas regras derivadas NOTA: Podes usar mas deves demonstrá-las à parte.

$$\frac{\phi\to\psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\mathbf{MT} \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg\phi]\\ \vdots\\ F\end{matrix}}{\phi}\mathbf{RA} \qquad \frac{}{\phi\vee\neg\phi}\mathbf{TE}$$

Axiomas de Peano (PA)

1. $\forall x(x+1\neq 0)$
2. $\forall x\forall y(x+1=y+1\to x=y)$
3. $0+1=1$
4. $\forall x\ x+0=x$
5. $\forall x\forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$
6. $\forall x\ x\times 0=0$
7. $\forall x\forall y\ x\times(y+1)=(x\times y)+x$
8. (princípio da indução) $(Q(0)\wedge\forall x(Q(x)\to Q(x+1)))\to\forall xQ(x)$