

Lógica Proposicional: semântica

1 Considerando as convenções de prioridades das operações lógicas dadas no curso, para cada uma das fórmulas seguintes desenha a sua árvore sintáctica e indica quais as suas subfórmulas:

- (a) $p \wedge \neg q \rightarrow \neg p$;
- (b) $p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$;
- (c) $p \rightarrow (\neg q \vee (q \rightarrow p))$;
- (d) $\neg(s \rightarrow (\neg(p \rightarrow (q \vee \neg s))))$;
- (e) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)))$.

2 Das fórmulas seguintes indica, **justificando** com uma tabela de verdade, se são tautologias, satisfazíveis ou contradições.

- (a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
- (b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$
- (c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
- (d) $(p \rightarrow (q \vee r)) \vee (r \rightarrow \neg p)$
- (e) $p \rightarrow q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$;
- (f) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee q))$;
- (g) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$;
- (h) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg(p \rightarrow s) \rightarrow \neg(q \rightarrow s))$;
- (i) $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$;
- (j) $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r))$;
- (k) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$;
- (l) $(p \rightarrow (q \rightarrow s)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow s))$;
- (m) $(p \rightarrow s) \rightarrow (((p \rightarrow (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow s)))$;
- (n) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$;
- (o) $(p \rightarrow q) \wedge \neg((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$;
- (p) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)))$;
- (q) $((p \wedge q) \rightarrow (s \vee t)) \rightarrow ((p \rightarrow s) \vee (q \rightarrow t))$;
- (r) $((p \vee q) \rightarrow (s \wedge t)) \rightarrow ((p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow t))$.
- (s) $(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$
- (t) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (\neg(p \leftrightarrow r))$

3 Numa ilha alguns dos seus habitantes, chamados “cavaleiros”, dizem sempre a verdade, e outros chamados “vagabundos” mentem sempre. Assumimos que um qualquer habitante desta ilha cai numa ou na outra classe.

- (a) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. **A** faz a seguinte afirmação: “Pelo menos um de nós é um vagabundo.”
O que são **A** e **B**?
- (b) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. Suponhamos que **A** diz: “Eu sou um vagabundo ou **B** é um cavaleiro.” O que são **A** e **B**?
- (c) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. Suponhamos que **A** diz: “Eu sou um vagabundo, ou dois mais dois é igual a cinco.” O que podemos concluir?

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 1

- (d) Dois habitantes da ilha, **A** e **B** estavam juntos num jardim. Suponhamos que **A** diz: “Eu sou um vagabundo, mas **B** não.”
O que são **A** e **B**?
- (e) Três habitantes, **A**, **B** e **C** juntam-se. **A** e **B** fazem as seguintes afirmações:
A: Todos nós somos vagabundos.
B: Exactamente um de nós é um cavaleiro.
O que são **A**, **B** e **C**?
- (f) Suponhamos que no problema anterior, **A** e **B** dizem o seguinte:
A: Nós somos todos vagabundos.
B: Exactamente um de nós é um vagabundo.
Podemos determinar o que é **B**? Podemos determinar o que é **C**?
- (g) Temos três personagens, **A**, **B** e **C** (cavaleiros ou vagabundos). **A** diz: “**B** e **C** são do mesmo tipo”. Alguém pergunta então a **C**: “**A** e **B** são do mesmo tipo?”
O que é que respondeu **C**?
- (h) Mais uma vez deparamo-nos com três habitantes, **A**, **B** e **C**. Dois deles são do mesmo tipo (cavaleiros ou vagabundos). **A** e **B** fazem as seguintes afirmações:
A: **B** é um vagabundo.
B: **A** e **C** são do mesmo tipo.
O que é **C**?
- (i) Três dos habitantes da ilha, **A**, **B** e **C**, estavam juntos num jardim. Um estrangeiro que por ali passava perguntou a **A**, “Tu és um cavaleiro ou um vagabundo?” **A** respondeu, mas de tal forma que o estrangeiro não conseguiu entender a resposta. Perguntou então, o estrangeiro, a **B**, “O que foi que **A** respondeu?” **B** responde: “**A** disse que era um vagabundo.” Nessa altura **C** exclama: “Não acredites em **B**, ele está a mentir!” O que são **B** e **C**?
- (j) Nessa ilha existe uma bifurcação numa estrada, conduzindo um dos caminhos à cidade mais próxima. Se um estrangeiro quiser saber qual é esse caminho, qual deve ser a pergunta que deve fazer a um habitante que esteja na bifurcação, de tal modo que ele possa responder com um simples “sim” ou “não”. **Sugestão**: A pergunta deve relacionar (por equivalência) o que se pretende saber com a determinação da classe do habitante.
- (k) **Uma minha aventura** Este é um problema invulgar, e além disso é inspirado num caso real. Uma vez quando na ilha dos cavaleiros e dos vagabundos, encontrei dois habitantes que descansavam debaixo de uma árvore. Aproximei-me e perguntei a um deles: “Algum de vocês é um cavaleiro?”. Ele respondeu, e com isso eu fiquei a saber a resposta à minha pergunta.
A pessoa que interpelei era um cavaleiro ou um vagabundo? E o outro? Posso garantir que dei a informação necessária para resolver o problema.
- (l) Suponhamos que visitavas a ilha dos cavaleiros e vagabundos e encontrava dois dos seus habitantes a descansar, preguiçosamente, ao sol. Perguntas a um deles se o outro é um cavaleiro e recebes a resposta (sim ou não). Nessa altura perguntas ao outro se o primeiro é um cavaleiro e recebes a respectiva resposta (sim ou não).
As duas respostas são necessariamente iguais?
- 4 [Cavaleiros, Vagabundos e Normais.] Um tipo igualmente fascinante de problemas trata de três tipos de pessoas: cavaleiros, que dizem sempre verdade; vagabundos, que dizem sempre mentira; e normais, que por vezes mentem, por vezes dizem a verdade.
- (a) Dadas três pessoas, **A**, **B** e **C**, uma das quais é um cavaleiro, outra um vagabundo e outra um normal (não necessariamente nesta ordem). Fazem as seguintes declarações:

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 1

A: Eu sou normal.

B: Isso é verdade!

C: Eu não sou normal.

O que são **A**, **B** e **C**?

- (b) Eis um invulgar! Duas pessoas, **A** e **B** (qualquer uma das quais pode ser cavaleiro, vagabundo ou normal), fazem as seguintes declarações:

A: **B** é um cavaleiro.

B: **A** não é um cavaleiro.

Prova que pelo menos um deles diz a verdade, mas não é um cavaleiro.

- (c) Desta vez **A** e **B** dizem o seguinte:

A: **B** é um cavaleiro.

B: **A** é um vagabundo.

Prova que um deles diz a verdade mas não é um cavaleiro, ou um deles mente mas não é um vagabundo.

- 5 Três indivíduos, A, B, e C, suspeitos de um crime, fazem os seguintes depoimentos, respectivamente:

A: B é culpado, mas C é inocente;

B: Se A é culpado, então C é culpado;

C: Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

- (a) Os três depoimentos são compatíveis?
(b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?
(c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?
(d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?
(e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentiram, quem é inocente e quem é culpado?

- 6 A proposição “Smith foi o assassino” é ou não uma consequência das proposições “se Jones não encontrou Smith na noite passada, então Smith foi o assassino ou Jones mente”, “se Smith não foi o assassino, então Jones não encontrou Smith na noite passada e o assassinio sucedeu depois da meia noite” e “se o assassinio sucedeu depois da meia noite, então Smith foi o assassino ou Jones mente”.

- 7 Será possível cumprir simultaneamente todas as instruções seguintes?

- se caminhar em silêncio então não tenha um revólver carregado, ou use óculos escuros;
- se tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio ou não use óculos escuros;
- se usar óculos escuros ou tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio.
- caminhe em silêncio ou tenha um revólver carregado, e se tiver um revólver carregado então não caminhe em silêncio;

- 8 Imagina as seguintes regras para escolher disciplinas de opção para o próximo ano lectivo:

R1: Se se escolher *Computação Gráfica*, então escolha também *Programação Numérica* ou *Álgebra*.

R2: Escolher *Álgebra* se e só se escolher *Computação Gráfica* ou *Programação Numérica*.

R3: Não se pode escolher as três, mas tem que se escolher pelo menos uma das três disciplinas.

R4: Se não se escolher *Álgebra*, então escolher as outras duas.

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 1

1. É possível satisfazer este conjunto de regras?
2. Será que a regra R4 é realmente necessária? E a regra R1?
3. Indica uma regra simples, mas equivalente a este conjunto (confuso) de quatro regras.

9 Quais das seguintes fórmulas é semanticamente equivalente a $p \rightarrow (q \vee r)$?

- (a) $q \vee (\neg p \vee r)$
- (b) $q \wedge \neg r \rightarrow p$
- (c) $p \wedge \neg r \rightarrow q$
- (d) $\neg q \wedge \neg r \rightarrow \neg p$

10 Mostra a equivalência semântica das propriedades das operações lógicas dadas no curso: comutatividade e associatividade de \wedge e \vee ; Leis de DeMorgan; distributividade de \wedge em relação a \vee (e vice-versa); idempotências de \wedge e \vee ; dupla negação.

11 Justifica a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, onde Γ e Σ representam conjuntos de fórmulas e $\phi, \psi, \theta, \gamma$ representam fórmulas da lógica proposicional:

- (a) A fórmula $(p \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow r) \rightarrow r)$ é uma tautologia.
- (b) A fórmula $(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ é uma tautologia.
- (c) A fórmula $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ é uma tautologia.
- (d) $\{(p \rightarrow q) \vee r, ((p \rightarrow q) \vee r) \rightarrow \neg r, (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)\} \models \neg q$
- (e) $\{p \vee \neg q, \neg r \rightarrow \neg \neg q, r \rightarrow \neg s, \neg \neg s\} \models p$
- (f) $\{\neg(q \wedge r), q\} \models \neg r$
- (g) $\{\neg p \vee \neg q \vee r, q \vee r, p\} \models r$
- (h) $\{\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \phi\} \models (\phi \vee \psi) \rightarrow (\phi \wedge \psi)$
- (i) $\{\psi \rightarrow \phi, \gamma \rightarrow \theta\} \models \psi \vee \gamma \rightarrow \phi \wedge \theta$.
- (j) $\{\psi \rightarrow (\neg \phi \vee \gamma), \neg \gamma\} \models \neg \phi \rightarrow \neg \psi$.
- (k) $\{(p \wedge q) \rightarrow r, \neg r\} \models p \vee q$.
- (l) Se $\phi, \psi \models \theta \rightarrow \gamma$ e $\phi \models \theta$ então $\phi, \psi \models \gamma$;
- (m) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$, então $\Sigma \models \theta$;
- (n) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Sigma \models \theta$, então $\Gamma \cap \Sigma \models \theta$;
- (o) Se $\Gamma \cup \{\phi\}$ é satisfazível então $\Gamma \cup \{\neg \phi\}$ não é satisfazível;
- (p) $\phi \models \psi \rightarrow \theta$ e $\gamma \models \psi$ se e só se $\phi, \gamma \models \theta$;
- (q) Se Σ é um conjunto de fórmulas satisfazível, então $\Sigma \cup \{\phi\}$ é satisfazível ou $\Sigma \cup \{\neg \phi\}$ é satisfazível qualquer que seja ϕ .
- (r) Se $\Sigma \models \phi$ e $\Gamma \models \phi$ então $\Sigma \cup \Gamma \models \phi$.
- (s) Se Σ é satisfazível então existe uma fórmula ϕ tal que $\Sigma \not\models \phi$.

12 Mostra que cada um dos seguintes conjuntos de conectivas são completos:

- (a) $\{\tilde{\vee}, \mathbf{V}\}$;
- (b) $\{\tilde{\wedge}, \mathbf{F}\}$;
- (c) $\{\neg, \wedge\}$.

13 Constrói uma fórmula em forma normal disjuntiva e uma em forma normal conjuntiva, cujas funções de verdade são dadas pelas seguintes tabelas:

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 1

x_1	x_2	x_3	f
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

x_1	x_2	x_3	f
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

14 Para cada uma das funções de verdade (a), (b) e (c) seguintes, constrói uma fórmula em forma normal disjuntiva e uma fórmula em forma normal conjuntiva:

p	q	r	(a)	(b)	(c)
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F

15 Para cada uma das seguintes fórmulas determina, por equivalências semânticas e indicando todos os passos, uma fórmula equivalente em forma normal disjuntiva e outra em forma normal conjuntiva.

- (a) $\neg(p \rightarrow (\neg(q \wedge (\neg p \rightarrow q))))$;
- (b) $p \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$;
- (c) $\neg(p \rightarrow (\neg(q \wedge (\neg p \rightarrow q))))$;
- (d) $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)) \rightarrow (p \vee \neg r)$;
- (e) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$;
- (f) $p \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$.

16 Considera o algoritmo de satisfabilidade para fórmulas de Horn dado no curso.

- (a) Descreve o algoritmo em pseudo-código e implementa-o.
- (b) Justifica a correção do algoritmo, isto é, qu atribui o valor verdade se e só se a fórmula de Horn é satisfazível.
- (c) Aplica o algoritmo às seguintes fórmulas:
 - $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge q$
 - $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
 - $\neg p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 1

$$\neg p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg r$$

17 Implementa o algoritmo de David-Putman para a satisfabilidade de cláusulas.

18 Para cada uma das seguintes fórmulas determina, por equivalências semânticas e indicando todos os passos, uma fórmula equivalente em forma normal disjuntiva e outra em forma normal conjuntiva.

(a) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow (p \vee \neg q))$

(b) $\neg(\neg(p \rightarrow (q \vee \neg p))) \rightarrow q$

(c) $p \rightarrow q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$;

(d) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$;

(e) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$;

(f) $\neg(\neg(q \wedge (\neg p \rightarrow q))) \rightarrow p$