

Lógica Proposicional: sistemas dedutivos

Os exercícios marcados com **Treino** são para realizar nas aulas de treino e não serão usados nas apresentações de trabalhos.

1 Usando o sistema de dedução natural *DN* para a lógica proposicional e a notação de Fitch, mostra que:

- (a) **Treino** $\delta \rightarrow (\phi \rightarrow \psi), \neg\psi, \delta \vdash \neg\phi$;
- (b) **Treino** $(\delta \wedge \neg\phi) \rightarrow \psi, \neg\psi, \delta \vdash \phi$;
- (c) $\vdash (\delta \rightarrow \psi) \rightarrow ((\neg\delta \rightarrow \neg\phi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi))$;
- (d) **Treino** $\vdash (\delta \rightarrow (\phi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\phi \rightarrow (\delta \rightarrow \psi))$;
- (e) $\vdash (\delta \wedge \phi) \rightarrow \phi$;
- (f) $\vdash \delta \rightarrow (\delta \vee \phi)$;
- (g) $\vdash (\neg\delta \rightarrow \delta) \rightarrow \delta$;
- (h) $\vdash \delta \rightarrow (\neg\phi \rightarrow \neg(\delta \rightarrow \phi))$;
- (i) **Treino** $\vdash (\phi \rightarrow \delta) \rightarrow ((\neg\phi \rightarrow \delta) \rightarrow \delta)$;
- (j) $\vdash ((\phi \rightarrow \delta) \rightarrow \delta) \rightarrow ((\delta \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$;
- (k) $\vdash ((\phi \rightarrow \delta) \wedge (\delta \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\phi \vee \delta) \rightarrow (\phi \wedge \delta))$;
- (l) **Treino** $\delta, \phi \rightarrow \psi \vdash \phi \rightarrow (\delta \rightarrow \psi)$;
- (m) $\delta, \neg\phi \vdash \neg(\delta \rightarrow \phi)$;
- (n) **Treino** $\vdash (\delta \rightarrow \phi) \rightarrow (\neg\delta \vee \phi)$;
- (o) $\vdash (\delta \rightarrow \phi) \rightarrow ((\neg\delta \rightarrow \phi) \rightarrow \phi)$;
- (p) $\vdash \phi \rightarrow (((\psi \rightarrow \phi) \rightarrow \delta) \rightarrow \delta)$
- (q) $\vdash \phi \vee \phi \rightarrow \phi$;
- (r) $\vdash \phi \rightarrow \phi \vee \delta$;
- (s) $\vdash \phi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \phi$;
- (t) $\psi \wedge \theta \rightarrow \neg\delta, \phi \rightarrow \delta, \theta, \phi \vdash \neg\psi$;
- (u) $\vdash ((\psi \vee \phi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \phi))$;
- (v) $\psi \vee \phi, \psi \rightarrow \delta, \neg\theta \rightarrow \neg\phi \vdash \delta \vee \theta$;
- (w) $\vdash (\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\delta \vee \psi \rightarrow \delta \vee \phi)$
- (x) $\vdash (((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\delta \rightarrow \neg\gamma)) \rightarrow \delta) \rightarrow \theta \rightarrow ((\theta \rightarrow \phi) \rightarrow (\gamma \rightarrow \phi))$
- (y) $(\psi \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \psi) \vdash (\psi \wedge \phi) \vee (\neg\psi \wedge \neg\phi)$

Nota: Caso uses regras derivadas, terá que as mostrar separadamente.

2 **Treino** Justifica a validade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, apresentando demonstrações ou contra-exemplos:

- (a) se $\vdash \psi$, então $\delta_1, \dots, \delta_n \vdash \psi$;
- (b) se $\delta_1, \dots, \delta_n \vdash \psi$, então $\vdash \psi$;
- (c) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$, então $\delta_2, \delta_1 \vdash \psi$;
- (d) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi \rightarrow \psi$ e $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;
- (e) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi \rightarrow \psi$ e $\delta_1 \vdash \phi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;
- (f) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi \rightarrow \psi$ e $\delta_1 \vdash \phi$, então $\delta_1 \vdash \psi$;
- (g) se $\delta_1 \vdash \phi \rightarrow \psi$ e $\delta_2 \vdash \phi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;
- (h) se $\delta, \delta \vdash \psi$ se e só se $\delta \vdash \psi$.

Lógica Computacional (CC2003) e Lógica e Computação (CC216)- Folha de trabalho n. 2

3 Usando o sistema de dedução natural DN para a lógica proposicional e a notação de Fitch, mostra sem usar a completude de DN que:

- (a) **Treino** $\neg(\delta_1 \wedge \delta_2) \dashv\vdash \neg\delta_1 \vee \neg\delta_2$
- (b) **Treino** $\neg(\delta_1 \vee \delta_2) \dashv\vdash \neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2$;
- (c) $\delta_1 \rightarrow \delta_2 \dashv\vdash \neg\delta_1 \vee \delta_2$;
- (d) **Treino** $\neg(\delta_1 \rightarrow \delta_2) \dashv\vdash \delta_1 \wedge \neg\delta_2$;
- (e) $\neg\delta_1 \wedge \delta_2 \vdash \delta_1 \vee \delta_2$;
- (f) $\neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2 \vdash \delta_1 \rightarrow \delta_2$;
- (g) $\delta_1 \wedge \delta_2 \vdash \delta_1 \vee \delta_2$;
- (h) $\delta_1 \wedge \neg\delta_2 \vdash \neg(\delta_1 \wedge \delta_2)$;
- (i) $(\psi \wedge \phi) \wedge \delta \dashv\vdash \psi \wedge (\phi \wedge \delta)$;
- (j) $(\psi \vee \phi) \vee \delta \dashv\vdash \psi \vee (\phi \vee \delta)$;
- (k) **Treino** $\neg(\neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2) \dashv\vdash \delta_1 \vee \delta_2$;
- (l) $\delta \rightarrow \phi \dashv\vdash (\delta \rightarrow (\delta \wedge \phi)) \wedge ((\delta \wedge \phi) \rightarrow \delta)$;
- (m) $\delta_1 \rightarrow \delta_2 \dashv\vdash \neg(\delta_1 \wedge \neg\delta_2)$;
- (n) $\delta \rightarrow \phi \dashv\vdash (\phi \rightarrow (\delta \vee \phi)) \wedge ((\delta \vee \phi) \rightarrow \phi)$;
- (o) $\delta_1 \wedge \delta_2 \dashv\vdash \neg(\neg\delta_1 \vee \neg\delta_2)$;
- (p) $(\delta \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \delta) \dashv\vdash (\delta \vee \phi) \rightarrow (\delta \wedge \phi)$;
- (q) $(\delta \rightarrow \phi) \dashv\vdash (\neg\phi \rightarrow \neg\delta)$;
- (r) $(\delta \rightarrow \phi) \wedge (\phi \rightarrow \delta) \dashv\vdash (\delta \vee \phi) \rightarrow (\delta \wedge \phi)$;
- (s) $\phi \wedge (\delta \vee \psi) \dashv\vdash (\phi \wedge \delta) \vee (\phi \wedge \psi)$;
- (t) $(\phi \vee \psi) \rightarrow \delta \dashv\vdash (\phi \rightarrow \delta) \wedge (\psi \rightarrow \delta)$
- (u) $(\delta \vee \phi) \wedge (\delta \vee \psi) \dashv\vdash \delta \vee (\phi \wedge \psi)$;
- (v) $\phi \rightarrow (\psi \wedge \delta) \dashv\vdash (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\phi \rightarrow \delta)$

4 Completa a demonstração do teorema da integridade do sistema de dedução natural, verificando que se existe um passo p em que a fórmula não é consequência semântica das premissas assumidas em p esse passo não pode resultar da aplicação das seguintes regras:

- (a) \wedge I
- (b) \wedge E
- (c) \vee I
- (d) \vee E
- (e) \neg I
- (f) \neg E

5 **Treino** Um conjunto de fórmulas Σ diz-se *formalmente completo* se para qualquer fórmula δ se tem

$$\Sigma \vdash \delta \text{ ou } \Sigma \vdash \neg\delta$$

Mostra que um conjunto de fórmulas da lógica proposicional Σ é *formalmente completo* se e só se para qualquer variável proposicional p se tem:

$$\Sigma \vdash p \text{ ou } \Sigma \vdash \neg p$$

Sugestão: usa indução estrutural nas fórmulas da lógica proposicional.

Lógica Computacional (CC2003) e Lógica e Computação (CC216)- Folha de trabalho n. 2

6 Treino Mostra, sem usar a completude de nenhum sistema de dedução, que qualquer que seja o conjunto de fórmulas da lógica proposicional Σ e δ uma fórmula, se tem:

- (a) Se $\Sigma \vdash \neg\delta$ então $\Sigma \cup \{\delta\}$ é inconsistente.
- (b) $\Sigma \models \delta$ se e só se $\Sigma \cup \{\neg\delta\}$ não é satisfazível.
- (c) $\Sigma \cup \{\neg\delta\} \vdash \mathbf{F}$ se e só se $\Sigma \vdash \delta$

7 Justifica a veracidade ou a falsidade das afirmações seguintes. Caso a afirmação seja falsa, poderás apresentar um contra-exemplo.

- (a) Sendo Σ um conjunto de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:
 - 1. Σ é inconsistente.
 - 2. $\Sigma \vdash \delta$ qualquer que seja a fórmula δ da lógica proposicional.
- (b) Sendo Σ e Γ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:
 - 1. $\Sigma \cup \Gamma$ é satisfazível.
 - 2. $\Sigma \cup \{\delta\}$ é satisfazível qualquer que seja a fórmula $\delta \in \Gamma$.
- (c) Sejam Σ e Γ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional. Então

$$\{\delta \mid \Sigma \cup \Gamma \vdash \delta\} = \{\delta \mid \Sigma \vdash \delta\} \cup \{\delta \mid \Gamma \vdash \delta\}.$$

8 Sejam Σ e Γ conjuntos de fórmulas da lógica proposicional tais que para qualquer fórmula δ se tem $\Sigma \vdash \delta$ ou $\Gamma \vdash \delta$.

- (a) Mostra que $\Sigma \cup \Gamma$ é não satisfazível.
- (b) Mostra que um dos conjuntos Σ ou Γ não é satisfazível.

9 Seja $\Sigma \cup \Gamma$ um conjunto de fórmulas da lógica proposicional, tal que para toda a fórmula δ se tem

$$\Sigma \vdash \delta \quad \text{se e só se} \quad \Gamma \vdash \delta.$$

Justifique a validade ou a falsidade de cada uma das afirmações seguintes, apresentando demonstrações ou contra-exemplos:

- (a) Seja $\delta_1, \dots, \delta_n$ é uma dedução de uma fórmula δ a partir do conjunto Σ . Então $\delta_1, \dots, \delta_n$ é também uma dedução de δ a partir de Γ .
- (b) Sejam $\bar{\Gamma} = \{\neg\delta \mid \delta \in \Gamma\}$ e $\delta_1, \dots, \delta_n$ uma dedução de uma fórmula δ a partir do conjunto Γ , então $\neg\delta_1, \dots, \neg\delta_n$ é uma dedução de $\neg\delta$ a partir do conjunto de hipóteses $\bar{\Gamma}$;
- (c) Σ é satisfazível se e só se Γ é satisfazível.