

Lógica de 1ª ordem

Linguagens, termos, fórmulas e semântica

- 1 a) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade e tal que $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$, $\mathcal{F}_2 = \{f, h\}$, $\mathcal{R}_1 = \{R, S\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{P, Q\}$.
- O comprimento de um termo t é o comprimento da sequência de caracteres que o representa. Por exemplo, $f(a, h(a, a))$ tem comprimento 11.
 - Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com menos de comprimento 10 e em que um mesmo símbolo funcional não ocorre mais que uma vez.
 - Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com menos de comprimento 8.
 - Indica, **justificando**, quais as seguintes expressões são termos de $\mathcal{L}$ e quais as que são termos de $\mathcal{L}$ fechados:
 - $h(a, f(a, g(a), g(a)))$
 - $f(h(x, g(g(a))), x)$
 - $f(a, P(a, g(x)))$
 - $h(g(f(a, a)), f(b, a))$
 - $f(h(x, h(y, y)), g(g(b)))$
 - $f(a, g(h(g(x), x(a))))$
 - Para cada uma das seguintes fórmulas determina, **justificando**:
 - quais têm ocorrências de variáveis livres e em que posição
 - quais as fórmulas que são proposições
 - quais as fórmulas atômicas que ocorrem em cada uma delas
 - $\forall x Q(x, x) \wedge P(x, x)$
 $R(a) \wedge \exists y (R(f(y, y)) \rightarrow P(a, y))$
 $\forall x \forall y x = y \rightarrow \forall x Q(x, y)$
 - $\forall x (Q(g(x), x) \rightarrow \exists y P(y, x))$
 $\exists x (S(f(a, x)) \vee P(a, x)) \rightarrow \forall y P(y, a)$
 $\forall x \exists y (Q(x, y) \rightarrow (Q(x, z) \wedge Q(z, y)))$
 - $\neg S(x) \wedge \forall x g(x) = f(x, a)$
 $R(a) \rightarrow \forall x \exists y (P(x, y) \vee Q(x, y))$
 $\forall x \forall y R(x) \vee \exists z z = h(x, y)$
- b) Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ definida por:
- o domínio de $\mathcal{A}$ é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$
 - $a^{\mathcal{A}} = 1, b^{\mathcal{A}} = 0$
 - $g^{\mathcal{A}}(n) = n + 4, n \in \mathbb{N}$
 - $h^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m, f^{\mathcal{A}}(n, m) = n \times m, n, m \in \mathbb{N}$
 - $S^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é ímpar}\}, R^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$
 - $P^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n > m\}$
 - $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$
- Para cada uma das seguintes proposições diz, **justificando** se é verdadeira ou falsa em $\mathcal{A}$
 - (*) $\forall x \exists y f(x, y) = a$
 - (*) $\exists x \exists y f(x, y) = a$
 - (*) $\forall x \exists y f(x, y) = a \rightarrow \exists y \forall x f(x, y) = a$
 - (*) $\exists x R(x) \rightarrow \forall x R(x)$
 - $\forall x \exists y P(y, x)$
 $\exists x \forall y P(y, x)$
 $\forall x \exists y P(y, x) \rightarrow \exists y P(y, y)$
 $\forall x S(x) \rightarrow \exists x S(x)$

- (f) $\forall x(S(x) \rightarrow S(g(x)))$
 $\forall x \exists y f(x, y) = a$
 $\exists x \forall y f(x, y) = a$
 $\forall x(S(x) \vee R(x)) \rightarrow (\forall x S(x) \vee \forall x R(x))$

ii. Considera as seguintes interpretações $s_i : Var \rightarrow \mathbb{N}$ para $i = 1, 2, 3$ e onde:

- $s_1(x) = 0$, para todo $x \in Var$;
- $s_2(x) = 2$, para todo $x \in Var$.
- $s_3(x) = 2$, $s_3(y) = 1$ e $s_3(z) = 5$.

Para cada uma das fórmulas ϕ seguintes e cada uma das interpretações s_i , diz se $\mathcal{A} \models_{s_i} \phi$, para $i = 1, 2, 3$:

- (a) $(*) \exists x \exists y f(x, y) = z$
(b) $(*) \exists z f(x, y) = z \rightarrow \forall y (S(y) \vee R(y))$
(c) $\forall x \exists y h(x, y) = z$
 $\neg \forall x (x = a \vee x = y)$
(d) $\forall x (y = a \vee x = y)$
 $\exists z f(x, y) = z \rightarrow \forall x (S(x) \vee R(x))$

c) Para cada uma das proposições seguintes indica uma estrutura de $\mathcal{L}$ onde ela é verdadeira e outra onde ela é falsa. Podes concluir que nenhuma das proposições ou das suas negações é uma fórmula válida?

- (a) $\forall x \forall y x = y$
 $\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists y \forall x P(x, y)$
(b) $\forall x x = a$
 $\forall x \forall y (R(x) \rightarrow R(y))$
(c) $\exists z (g(z) \neq a \rightarrow \exists z (g(z) = a))$
 $\forall x Q(x, g(x)) \leftrightarrow \exists x P(a, x)$
(d) $\forall y (\forall x (R(x) \rightarrow P(x, x)) \rightarrow (R(y) \rightarrow \forall x P(x, x)))$

2 a) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1^a ordem com igualdade e tal que $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g, h\}$, $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{R}_1 = \{S\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{R, Q\}$.

i. O **tamanho** de um termo t é o número de símbolos funcionais ou variáveis que ocorrem no termo. Por exemplo, o termo $f(g(x), a)$ tem tamanho 4.

- (a) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com tamanho menor que 5 e em que um mesmo símbolo funcional não ocorre mais que uma vez.
(b) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com tamanho menor que 4.
(c) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com tamanho menor que 5, em que a única constante é b .

ii. Para cada uma das seguintes fórmulas determina, **justificando**:

- quais têm ocorrências de variáveis livres e em que posição
- quais as fórmulas que são proposições
- quais as fórmulas atómicas que ocorrem em cada uma delas

- (a) $\forall x (R(x, y) \rightarrow \exists y \neg Q(x, y))$
 $\forall x (S(g(x)) \vee Q(a, x)) \rightarrow \exists y R(y, x)$
 $\forall x g(x) = x \rightarrow \neg (\forall z \exists y x \neq y \wedge S(z))$
(b) $(\forall x Q(x, a) \rightarrow S(x)) \wedge \forall x (\exists y R(y, a) \vee S(g(x)))$
 $\forall x \forall z \neg x = z \rightarrow (\forall x S(h(x)) \wedge R(z, z))$
 $\forall z \forall y (z \neq y \rightarrow (\forall x S(x) \wedge R(x, g(y))))$

b) Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ definida por:

- o domínio de $\mathcal{A}$ é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- $a^{\mathcal{A}} = 0$, $b^{\mathcal{A}} = 4$

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 3

- $g^{\mathcal{A}}(n) = n^2, n \in \mathbb{Z}$
 - $h^{\mathcal{A}}(n) = n + 1, n \in \mathbb{Z}$
 - $f^{\mathcal{A}}(n, m) = n - m, n, m \in \mathbb{Z}$
 - $S^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é par}\}$
 - $Q^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \leq m\}$
 - $R^{\mathcal{A}} = \{(-2, 3), (5, 4)\}$
- i. Para cada uma das proposições ϕ seguintes determina usando a noção de satisfizibilidade se é verdadeira ou falsa em $\mathcal{A}$, i.e., se $\mathcal{A} \models_s \phi$ ou $\mathcal{A} \not\models_s \phi$, para toda a interpretação s :
- (a) $\forall x \exists y g(x) = g(y)$
 $\forall x \forall y g(x) = g(y)$
 $\forall x (S(x) \rightarrow S(g(x)))$
 $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow Q(x, y))$
 - (b) $\forall x \exists y x = h(y)$
 $\exists y \forall x x = h(y)$
 $\forall x (S(x) \rightarrow \neg S(g(h(x))))$
 $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow (S(y) \vee \neg S(f(x, y))))$
 - (c) $\exists y \forall x f(x, y) = a$
 $\exists y \exists x f(x, y) = a$
 $\forall x (S(x) \rightarrow \neg S(g(x)))$
 $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow (S(y) \wedge S(g(y))))$
- ii. Considera as seguintes interpretações $s_i : Var \rightarrow \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, 3$ e onde:
- $s_1(z) = 2$, para todo $z \in Var$.
 - $s_2(z) = 0$, para todo $z \in Var$.
 - $s_3(z) = 4$, para todo $z \in Var$.
- Para cada uma das fórmulas ϕ seguintes e cada uma das interpretações s_i , diz se $\mathcal{A} \models_{s_i} \phi$, para $i = 1, 2, 3$:
- (a) $\exists x g(z) = x$
 $\forall z z = a \vee z = b$
 - (b) $\forall x Q(z, g(x))$
 $\neg(\forall z (z = a \vee z = b))$
 - (c) $\exists x f(z, x) = a$
 $\forall z (z = a \vee z = b)$

3 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e tal que $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$, $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{R}_2 = \{S\}$. Considera $\mathcal{A}$ a estrutura de $\mathcal{L}$ definida por:

- o universo de $\mathcal{A}$ é o conjunto de números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$;
- $a^{\mathcal{A}} = 0$;
- $b^{\mathcal{A}} = 7$;
- $g^{\mathcal{A}}(n) = n^2$, para $n \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{A}}(n, m) = n - m$, para $n, m \in \mathbb{Z}$;
- $S^{\mathcal{A}} = \{(2, 1), (3, 3)\}$.

Sejam $x, y \in Var$ e $s_1, s_2 : Var \rightarrow \mathbb{Z}$ interpretação tais que

$$\begin{cases} s_1(x) = 0 \\ s_1(y) = 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s_2(x) = 1 \\ s_2(y) = -1 \end{cases}$$

- (a) Para cada um dos termos seguintes t determina $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

- i) $g(x)$
- ii) $g(y)$
- iii) $f(a, g(f(x, y)))$
- iv) $g(g(f(b, b)))$
- v) $f(a, a)$
- (b) Para cada uma das fórmulas seguintes ϕ diz se $\mathcal{A} \models_{s_1} \phi$ e se $\mathcal{A} \models_{s_2} \phi$.
 - i) $S(f(x, y), x)$
 $\exists x S(x, x)$
 - ii) $\forall x(x = a \vee y = b)$
 $\neg \forall x(x = a \vee y = b)$
 - iii) $\forall y \forall z(f(y, z) = a \vee x \neq g(f(z, y)))$
 $\exists z((f(x, y) = z \wedge S(z, x)) \rightarrow \exists x S(x, x))$

Semântica: caracterização de propriedades de modelos por proposições; formas normais

4 Seja $\mathcal{L}_G$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade, sem símbolos funcionais e apenas um símbolo relacional binário, i.e, $R_2 = \{R\}$. Qualquer estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um grafo dirigido, que podemos representar por $\mathcal{G} = (A, E)$.

- i. (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$ tal que uma estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um modelo de ϕ se e só se $\mathcal{G}$ for um grafo dirigido sem vértices isolados.
- (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg \phi$
- ii. Diz-se $\mathcal{G}$ tem um **trajecto** de comprimento $n \geq 1$ se e só se existem $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$, **todos distintos** tal que $(a_0, a_1) \in E$, $(a_1, a_2) \in E$, $\dots$, $(a_{n-1}, a_n) \in E$.
 - (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se $\mathcal{G}$ tem um **trajecto** de comprimento 3.
 - (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg \phi$.
- iii. Seja $\mathcal{G} = (A, E)$ um grafo dirigido. Um arco $(a, b) \in E$ é incidente no nó $b \in A$. O **grau de entrada** de um nó é o número de arcos incidentes nele.
 - (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se todos os nós de $\mathcal{G}$ têm grau de entrada pelo menos 3.
 - (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg \phi$
- iv. Seja $\mathcal{G} = (A, E)$ um grafo dirigido. Dizemos que existe um ciclo de comprimento $n \geq 1$ em $\mathcal{G}$ se e só se existirem nós $a_1, \dots, a_n \in A$ tais que $(a_1, a_2) \in E, \dots, (a_n, a_1) \in E$.
 - (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se $\mathcal{G}$ **não** tiver ciclos de comprimento 3.
 - (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg \phi$
- v. Um grafo $\mathcal{G} = (A, E)$ é não dirigido se E é uma relação binária simétrica. Num grafo não dirigido o grau de um nó A é o número de arestas incidentes em a . Um grafo não dirigido é n -regular se todos os nós têm grau n .
 - (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se for não dirigido e 2-regular.
 - (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg \phi$
- vi. Um grafo não dirigido $\mathcal{G}$ é um par (A, E) onde A é um conjunto não vazio (nós) e E é um conjunto de pares **não ordenados** de elementos **distintos** de A (arestas).
 - (a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{G} = (A, .^A)$ é um modelo de ψ se e só se a relação R^A é anti-reflexiva e simétrica. Justifica, informalmente, que tais estruturas são grafos (não dirigidos).

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 3

- (b) Num grafo não dirigido o grau de um nó $a \in A$ é o número de arestas incidentes em a . Um grafo não dirigido é um *círculo* se todos os seus nós têm grau 2.
- (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é modelo para $\psi \wedge \phi$ se e só se for um círculo.
- (b) Indica, **justificando** duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, tal que $\mathcal{G}_1 \models \psi \wedge \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \psi \wedge \neg\phi$

5 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

- i (a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ψ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de **ordem parcial** (i.e é reflexiva, anti-simétrica e transitiva).
- (b) Um conjunto A com uma relação de ordem $R^{\mathcal{A}}$ é uma **cadeia** se para todos $x, y \in A$, $(x, y) \in R^{\mathcal{A}}$ ou $(y, x) \in R^{\mathcal{A}}$. Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi$ se e só se A é uma cadeia com pelo menos 3 elementos.
- ii Seja A um conjunto com uma relação de ordem parcial $R^{\mathcal{A}}$. Dados dois elementos $a, b \in A$ dizemos que a é **menor** do que b se $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$. Dados dois elementos a e b de A , seja $s \in A$ menor do que a e que b . Dizemos que s é um **ínfimo** de a e b se sempre que houver outro elemento $s' \in A$ nas mesmas condições, então s' é menor do que s . Dizemos que A é um **reticulado inferior** se para cada dois elementos de a e b de A , existe um elemento $c \in A$ que é **ínfimo** de a e b .
- (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$, tal que um conjunto A é um reticulado inferior se e só se $\mathcal{A}$ é modelo para $\psi \wedge \phi$, onde ψ é definido como em 5.a.
- (b) Indica, **justificando** duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, tal que $\mathcal{A}_1 \models \psi \wedge \phi$ e $\mathcal{A}_2 \models \psi \wedge \neg\phi$. Caso queiras poderás representar $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ por diagramas de Hasse.

6 Para cada par de fórmulas seguinte mostra, usando as definições, que as fórmulas são válidas ou, caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ϕ e ψ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{A}$ não é modelo da fórmula correspondente.

- (a) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi)$
 $(\forall x\phi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi)$
- (b) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\phi \rightarrow \forall x\psi)$
 $(\exists x\phi \rightarrow \exists x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi)$
- (c) $\forall x(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\phi \rightarrow \exists x\psi)$
 $(\exists x\phi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi)$
- (d) $\forall x\exists y(\phi \vee \psi) \rightarrow \exists x\forall y(\phi \wedge \psi)$
 $\forall x(\psi \vee \phi) \rightarrow \neg\exists x(\neg\psi \wedge \neg\phi)$
- (e) $\exists x\neg(\phi \vee \psi) \rightarrow \exists x(\neg\phi \vee \neg\psi)$
 $\exists y(\phi \wedge \psi) \rightarrow (\forall y\phi \wedge \forall y\psi)$

7 Para cada um dos termos e fórmulas indicados determina as substituições e quais as variáveis que são substituíveis por t em ϕ :

- (a) $\neg(\forall x\exists yP(x, y, z) \wedge \forall zP(x, y, z))$ e t o termo $g(f(y, y), y)$ para $\phi[t/x]$, $\phi[t/y]$ e $\phi[t/z]$.
- (b) $\forall x\exists yQ(x, z) \wedge \exists zP(z, y)$ e t o termo $f(h(x, y), y)$ para $\phi[t/x]$, $\phi[t/y]$ e $\phi[t/z]$.
- (c) $x \neq g(y) \rightarrow \exists z(P(z) \rightarrow R(x, y))$ e t o termo $g(y)$ para $\phi[t/x]$.
- (d) $\exists xS(x, x) \vee \exists z(P(z) \wedge R(x, z))$ e t o termo $h(x, y, z)$ para $\phi[t/x]$.
- (e) $\forall x\exists yQ(x, y) \wedge P(x, y, y)$ e t o termo y para $\phi[t/x]$.

8 Para cada uma das fórmulas seguintes determina uma forma normal prenexa de

- (a) $\neg \forall x R(x, u) \wedge \exists y (\neg \forall x R(y, x) \rightarrow Q(u, y))$
- (b) $\forall x \neg \exists y \forall u P(x, y) \rightarrow \neg (\exists z P(x, y) \rightarrow \forall y P(u, y))$
- (c) $\exists x S(x, x) \vee \exists z (P(z) \wedge \forall x R(x, z))$
- (d) $\neg (\exists x Q(x, y) \rightarrow \neg \forall x (\forall z P(z, y, x) \rightarrow \neg \exists y P(y)))$
- (e) $\neg (\forall x R(x, y) \rightarrow \exists x \neg (\exists z Q(z, y, x) \rightarrow \forall y P(y)))$

Resolução de exercícios selecionados (*)

Resolução 1.bi

- (a) Pretende-se que para qualquer interpretação $s : Var \rightarrow \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A} \models_s \forall x \exists y f(x, y) = a \quad (1)$$

Iremos usar indutivamente a definição de $\models_s$.

Por (vii), (1) é verdade, se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$\mathcal{A} \models_{s[n/x]} \exists y f(x, y) = a \quad (2)$$

Por (viii), (2) é verdade, se existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s[n/x][m/y]} f(x, y) = a \quad (3)$$

Por (i), (3) é verdade, se

$$s[n/x][m/y](f(x, y)) = s[n/x][m/y](a) \quad (4)$$

Mas, pela definição de interpretação estendida a termos e de $s[a/x]$ para a pertencente ao domínio de $\mathcal{A}$,

$$s[n/x][m/y](f(x, y)) = f^{\mathcal{A}}(s[n/x][m/y](x), s[n/x][m/y](y)) = f^{\mathcal{A}}(n, m) = n \times m$$

$$\text{e } s[n/x][m/y](a) = a^{\mathcal{A}} = 1$$

Em resumo, (1) é verdade se

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \times m = 1$.

o que é **Falso**. Por exemplo, para $n = 3$ ter-se-ia $m = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

- (b) Analogamente se obteria, para qualquer interpretação s

$$\mathcal{A} \models_s \exists x \exists y f(x, y) = a \quad (5)$$

se e só se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \times m = 1$.

o que é **Verdade**, por exemplo para $n = 1$ e $m = 1$.

- (c) Pretende-se que, para qualquer interpretação s

$$\mathcal{A} \models_s \forall x \exists y f(x, y) = a \rightarrow \exists y \forall x f(x, y) = a \quad (6)$$

Por (vi) da definição de $\models_s$, (6) é verdade se

$$\mathcal{A} \not\models_s \forall x \exists y f(x, y) = a \text{ ou } \mathcal{A} \models_s \exists y \forall x f(x, y) = a$$

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 3

Pela alínea (a), vimos que não é verdade que $\mathcal{A} \models_s \forall x \exists y f(x, y) = a$, logo $\mathcal{A} \not\models_s \forall x \exists y f(x, y) = a$ é verdade. E também (6).

(d) Pretende-se que, para qualquer interpretação s

$$\mathcal{A} \models_s \exists x R(x) \rightarrow \forall x R(x) \quad (7)$$

Por (vi) da definição de $\models_s$, (7) é verdade se

$$\mathcal{A} \not\models_s \exists x R(x) \text{ ou } \mathcal{A} \models_s \forall x R(x)$$

Vamos determinar se $\mathcal{A} \models_s \exists x R(x)$. Isto é verdade, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s[n/x]} R(x) \quad (8)$$

Por (ii), (8) é verdade se

$$s[n/x](x) \in R^{\mathcal{A}} \quad (9)$$

Como $s[n/x](x) = n$, vem que (8) é verdade se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que n é par

o que é **Verdade**. Então $\mathcal{A} \models_s \exists x R(x)$ é **Falso**.

Temos que analisar a veracidade de $\mathcal{A} \models_s \forall x R(x)$. Analogamente obtemos que é verdade se

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, n é par

o que também é **Falso**. Donde (7) é **Falsa**.

Resolução 1b.bii

(a) Sendo s_1 uma interpretação que atribui o valor 2 a qualquer variável, pretende-se que

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \exists x \exists y f(x, y) = z \quad (10)$$

Isto é verdade se, existe um $n \in \mathbb{N}$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/x][m/y]} f(x, y) = z \quad (11)$$

Isto é se,

$$s_1[n/x][m/y](f(x, y)) = s_1[n/x][m/y](z) \quad (12)$$

Mas $s_1[n/x][m/y](f(x, y)) = f^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m$ e $s_1[n/x][m/y](z) = s_1(z) = 2$

Então (10) é verdade se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $m + n = 2$

o que é **Verdade**. Basta tomar $n = 2$ e $m = 0$.

(b) Sendo s_1 uma interpretação que atribui o valor 2 a qualquer variável, pretende-se que

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \exists z f(x, y) = z \rightarrow \forall y (S(y) \vee R(y)) \quad (13)$$

Mais uma vez isto é verdade se $\mathcal{A} \models_{s_1} \exists z f(x, y) = z$ ou se $\mathcal{A} \models_{s_1} \forall y (S(y) \vee R(y))$

Temos que:

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \exists z f(x, y) = z \quad (14)$$

se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/z]} f(x, y) = z \quad (15)$$

Isto é se,

$$s_1[n/z](f(x, y)) = s_1[n/z](z) \quad (16)$$

e $s_1[n/z](f(x, y)) = f^{\mathcal{A}}(s_1[n/z](x), s_1[n/z](y)) = f^{\mathcal{A}}(s_1(x), s_1(y)) = 2 + 2$ e $s_1[n/z](z) = n$

Então (14) é verdade se

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 3

Existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \times 2 = n$

o que é **Verdade**. Tomar $n = 4$.

Mas então $\mathcal{A} \not\models_{s_1} \exists z f(x, y) = z$ é **Falso**.

Temos que

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \forall y (S(y) \vee R(y)) \quad (17)$$

se, para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} (S(y) \vee R(y)) \quad (18)$$

Por (v) da definição de $\models_s$, (18) é verdade se $\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} S(y)$ ou $\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} R(y)$

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} S(y) \quad (19)$$

se

$$s_1[n/y](y) \in S^{\mathcal{A}} \quad (20)$$

isto é se n é ímpar.

Analogamente $\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} R(y)$, se n é par. Então, (17) é verdade se

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, n é ímpar ou n é par

o que é **Verdade**. Nota que é importante a disjunção estar no âmbito do quantificador e não o rário: é falso que *para todo* $n \in \mathbb{N}$, n é ímpar ou *para todo* $n \in \mathbb{N}$, n é par.

Finalmente, temos que (13) é **Verdade**.