Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 4

1 Sistema de dedução natural DN para a lógica de 1ª ordem

1 Usando o sistema de dedução natural para a lógica de 1ª ordem e sem usar a completude, mostra em notação de Fitch:

(a) $\forall x(R(x) \wedge S(x)) \vdash \forall x\, R(x) \wedge \forall x S(x)$

(b) $\forall x(R(x) \rightarrow S(x)) \vdash \forall x R(x) \rightarrow \forall x S(x)$

(c) $\exists x(R(x) \wedge S(x)) \vdash \exists x R(x) \wedge \exists x S(x)$

(d) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x), \forall x(R(x) \rightarrow \neg P(x)) \vdash \exists x \neg R(x)$

(e) $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))), \neg\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

(f) $\exists x \exists y(P(x,y) \vee P(y,x)) \vdash \exists x \exists y P(x,y)$

(g) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \vdash \exists x(R(x) \wedge Q(x))$

(h) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \wedge \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \rightarrow x = y)$, onde $\psi \leftrightarrow \phi$ é uma abreviatura de $\psi \rightarrow \phi$ e $\phi \rightarrow \psi$

(i) $\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow y = x)) \vdash \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow x = y)$

(j) $\forall x P(a,x,x), \forall x \forall y \forall z(P(x,y,z) \rightarrow P(f(x),y,f(z))) \vdash P(f(a),a,f(a))$

(k) $\exists x \exists y(H(x,y) \vee H(y,x)), \neg\exists x H(x,x) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

(l) $\forall x \forall y R(x,y) \vdash \forall y \forall x R(x,y)$

(m) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v((x = u \wedge y = v) \rightarrow (P(x,y) \rightarrow P(u,v)))$

(n) $\exists y \exists x Q(y,x) \vdash \exists x \exists y Q(y,x)$

(o) $\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)$

(p) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$

(q) Se x não ocorre livre em ϕ, $\exists x\psi \vee \phi \dashv\vdash \exists x(\psi \vee \phi)$

(r) $\vdash \forall x \forall y x = y \rightarrow f(x) = f(y)$

(s) $\vdash x = f(y) \rightarrow (\forall z P(x,z) \rightarrow P(f(y),z))$

(t) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v((x = u \wedge y = v) \rightarrow f(x,y) = f(u,v)))$

(u) $\vdash \forall x \forall y(f(x) \neq f(y) \rightarrow x \neq y)$

(v) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \rightarrow (y = v \rightarrow f(x,y) = f(u,v)))$

(w) $\vdash \exists x(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \exists x\phi)$

(x) $\vdash (\exists x\psi \rightarrow \forall x\phi) \rightarrow \forall x(\psi \rightarrow \phi)$

(y) $\vdash \forall x(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\exists x \neg\phi \rightarrow \exists x \neg\psi)$

(z) $\vdash \forall x(\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\exists x \neg\phi \rightarrow \exists x\psi)$

2 Seja Σ um conjunto de fórmulas de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ tal que x não ocorre livre em nenhuma fórmula de Σ. Mostra que,

(a) se $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ e x não ocorre livre em ψ, então $\Sigma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \psi$;

(b) se $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, então $\Sigma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \exists x\psi$.

Completude e integridade da lógica 1ª ordem.

3 Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se é ou não um teorema da lógica de 1ª ordem, quaisquer que sejam as fórmulas ψ e ϕ. Justifica, mostrando que existe uma dedução natural da respectiva fórmula (sem usar a completude da lógica de 1ª ordem), ou então indicando uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ψ e ϕ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{A}$ não é modelo da fórmula correspondente.

(a) $(\forall x\psi \vee \forall x\phi) \rightarrow \exists x(\psi \vee \phi)$
$\forall x \exists y\psi \rightarrow \exists y \forall x\psi$

(b) $(\exists x\psi \ \wedge \ \exists x\phi) \rightarrow \exists x(\psi \ \wedge \ \phi)$
$\exists x(\neg\psi \ \wedge \ \neg\phi) \rightarrow \exists x(\neg(\psi \ \wedge \ \phi))$

(c) $\forall x(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\exists x\psi \rightarrow \exists x\phi)$
$\exists x\exists y(\phi \ \vee \ \psi) \rightarrow \forall y\exists x(\phi \ \vee \ \psi)$

(d) $\exists x\forall y\psi \rightarrow \exists x\exists y\psi$
$\forall x\exists y(\phi \ \wedge \ \psi) \rightarrow \exists x\forall y(\phi \ \wedge \ \psi)$

(e) $\forall x(\psi \rightarrow \neg\phi) \rightarrow \neg\exists x(\psi \ \wedge \ \phi)$
$(\exists x\phi \ \vee \ \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\phi \ \wedge \ \psi)$

(f) $\forall x(\neg\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\exists x\neg\phi \rightarrow \exists x\psi)$
$\neg(\forall x\exists y\psi \rightarrow \exists y\forall x\psi)$

(g) $\exists x\,\neg(\psi \ \vee \ \phi) \rightarrow \exists y(\neg\psi \ \vee \ \neg\phi)[y/x]$, onde y não ocorre em ψ nem ϕ.
$(\exists x\,\neg\phi \rightarrow \exists x\,\neg\psi) \rightarrow \forall x(\phi \rightarrow \psi)$.

(h) $\forall x(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\exists x\neg\phi \rightarrow \exists x\neg\psi)$
$(\exists x\phi \vee \exists x\psi) \rightarrow \exists x(\phi \wedge \psi)$

(i) $(\exists x\psi \ \vee \ \exists x\phi) \rightarrow \exists x(\psi \ \vee \ \phi)$
$\exists x(\psi \ \vee \ \phi) \rightarrow (\exists x\psi \ \vee \ \exists x\phi)$

(j) $\exists x(\psi \rightarrow \phi) \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \exists x\phi)$
$(\forall x\psi \rightarrow \exists x\phi) \rightarrow \exists x(\psi \rightarrow \phi)$

4 Completa a demonstração do teorema da integridade do sistema de dedução natural para a lógica de 1ª ordem, verificando que se no passo de indução a regra a aplicar for uma das seguintes, a fórmula resultante é consequência semântica das premissas aí assumidas:

(a) $\forall$**E** ou $\exists$**I**

(b) $=$ **E** ou $\rightarrow$ **I**

(c) $\forall$**I** ou $\wedge$ **E**

5 Seja ψ uma proposição de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$. Relaciona as afirmações seguintes, **justificando**.

(a) – existe uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ e uma interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \not\models_s \neg\psi$;
– ψ é uma fórmula válida.

(b) – $\vdash \psi$
– $\neg\psi$ é falso em todas as estruturas de $\mathcal{L}$.

(c) – $\models \psi$
– existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \neg\psi$ e $\mathcal{B} \not\models \neg\psi$.

6 Seja ψ uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ para a qual existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tais que $\mathcal{A} \models_s \psi$ para toda a interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \not\models_t \psi$ para toda a interpretação t das variáveis em $\mathcal{B}$. Justifica a validade ou falsidade das afirmações seguintes:

– ψ é uma proposição;

– ψ não é uma fórmula válida;

– $\neg\psi$ não é uma fórmula válida.

7 Um conjunto consistente Δ diz-se maximal se para qualquer fórmula ψ se tem ou $\psi \in \Delta$ ou $\neg\psi \in \Delta$. Mostra que se Δ é um conjunto consistente maximal e $\Delta \vdash \theta$, então $\theta \in \Delta$.

8 Um conjunto Σ de proposições de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ diz-se completo (em $\mathcal{L}$) se e só se para toda a proposição ψ de $\mathcal{L}$ se tem $\psi \in \Sigma$ ou $\neg\psi \in \Sigma$. Mostra que um conjunto consistente Σ é completo se e só se para toda a proposição ψ de $\mathcal{L}$, se $\psi \notin \Sigma$, então $\Sigma \cup \{\psi\}$ é inconsistente.