Lógica Computacional (CC2003) e Lógica e Programação (CC216)- Folha de trabalho n. 5

1 Aplicações da Compacidade

1 Seja $\mathcal{G}$ o grafo de uma relação binária R definida num conjunto não vazio A. Dizemos que existe um ciclo de comprimento $n \geq 1$ em $\mathcal{G}$ se e só se existirem pontos $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $(a_1, a_2) \in R, (a_2, a_3) \in R, \ldots, (a_n, a_1) \in R$, com $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Seja L a linguagem de $1^{\underline{a}}$ ordem (sem igualdade) e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

(a) Para cada $n \geq 1$ define uma proposição ψ_n tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo para ψ_n se e só se o grafo da relação $R^{\mathcal{A}}$ **não** tiver ciclos de comprimento n.

(b) Define um conjunto de fórmulas Σ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo para Σ se e só se o grafo da relação $R^{\mathcal{A}}$ **não** tiver ciclos (isto é, que o conceito **não ter ciclos** pode ser expresso por um conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$)

(c) Mostra que não existe nenhuma fórmula θ nessas condições, i.e. tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo para θ se e só se o grafo da relação $R^{\mathcal{A}}$ **não** tiver ciclos

2 `T` Considera a linguagem da teoria de grafos $\mathcal{L}_G$, que é a linguagem de $1^{\underline{a}}$ ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

(a) Para cada $n \geq 1$ define uma proposição ψ_n tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo para ψ_n se e só se existirem n vétices isolados no grafo da relação $R^{\mathcal{A}}$.

(b) Define um conjunto Σ de proposições da linguagem $\mathcal{L}_G$ tal que uma $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo de Σ se e só se existir um número infinito de vértices isolados de relação o $R^{\mathcal{A}}$. Indica um modelo para Σ

(c) Seja θ uma proposição que é válida em todos os grafos com um número infinito de vértices. Mostra que existe $n_0 \geq 0$ tal que θ se verifica em qualquer grafo com pelo menos n_0 vértices isolados.

3 Seja $\mathcal{L}$ a linguagem de $1^{\underline{a}}$ ordem com igualdade e $R_1 = \{P\}$.

(a) Para cada $n \geq 2$ define uma proposição ψ_n tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo para ψ_n se e só se $P^{\mathcal{A}}$ tiver pelo menos n elementos.

(b) Define um conjunto Σ de proposições de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \Sigma$ se e só se $P^{\mathcal{A}}$ é infinito.

(c) Seja θ uma proposição de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \theta$ sempre que $P^{\mathcal{A}}$ é finito. Mostra que θ tem pelo menos um modelo $\mathcal{A}$ tal que $P^{\mathcal{A}}$ é infinito.

4 `T` Um autómato finito sobre $\{a, b\}$ é um tuplo $\mathcal{A} = (A, \{a, b\}, R_a, R_b, s, F)$ onde A é um conjunto finito, $s \in A$, $F \subseteq A$ e R_a e R_b são relações binárias em A. Uma palavra de tamanho $n \geq 1$, $x_1 \ldots x_n$ com $x_i \in \{a, b\}$ para $1 \leq i \leq n$, é aceite por $\mathcal{A}$ se existem $a_1, \ldots a_{n+1} \in A$ tal que a_1 é s, $a_n \in F$ e $(a_i, a_{i+1}) \in R_{x_i}$, para $1 \leq i \leq n$. Se $s \in F$ diz-se que $\mathcal{A}$ aceita a palavra **vazia**.

Seja $\mathcal{L}_A$ uma linguagem de $1^{\underline{a}}$ ordem com igualdade e $\mathcal{F}_0 = \{s\}$, $\mathcal{R}_1 = \{F\}$, $\mathcal{R}_2 = \{R_a, R_b\}$. Uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ para $\mathcal{L}_A$, com domínio A finito, diz-se um *autómato finito* sobre $\{a, b\}$. O autómato seguinte é definido pela estrutura: $A = \{1, 2\}$, $s^{\mathcal{A}} = 1$, $F^{\mathcal{A}} = \{2\}$, $R_a^{\mathcal{A}} = \{(1, 2), (2, 2)\}$ e $R_b^{\mathcal{A}} = \{(2, 2)\}$

(a) Define uma proposição ψ_0 de $\mathcal{L}_A$, tal que um *autómato finito* $\mathcal{A}$ é um modelo de ψ_0 se e só se $\mathcal{A}$ **não aceita** a palavra vazia.

(b) Para cada $n \geq 1$ define uma proposição ψ_n de $\mathcal{L}_A$, tal que um *autómato finito* $\mathcal{A}$ é um modelo de ψ_n se e só se $\mathcal{A}$ **não aceita** nenhuma palavra de tamanho n.

(c) Define um conjunto de fórmulas Σ tal que uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}_A$, com domínio finito, é um modelo de Σ se e só se $\mathcal{A}$ é um autómato finito que **não aceita** nenhuma palavra.

(d) Mostra que não existe nenhuma fórmula θ tal que uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}_A$, com domínio finito, é um modelo de θ se e só se $\mathcal{A}$ é um autómato finito que **não aceita** nenhuma palavra.

5 Seja $\mathcal{G} = (A, V)$ um grafo dirigido. $\mathcal{G}$ tem um **trajecto** de comprimento $n \geq 1$ se e só se existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$, **todos distintos** tal que $(a_0, a_1) \in V$, $(a_1, a_2) \in V$, ..., $(a_{n-1}, a_n) \in V$.

Seja $\mathcal{L}_G$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade, sem símbolos funcionais e apenas um símbolo relacional binário, i.e, $\mathcal{R}_2 = \{R\}$. Qualquer estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um grafo dirigido.

(a) Para cada $n \geq 1$ define uma proposição ψ_n de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ψ_n se e só se $\mathcal{G}$ tem um **trajecto** de comprimento n.

(b) Define um conjunto Σ de proposições de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para Σ se e só se para qualquer $n \geq 1$, existe um **trajecto** de comprimento n em $\mathcal{G}$.

(c) Seja ϕ uma proposição de $\mathcal{L}_G$ que é válida em todos os grafos $\mathcal{G}$ em que existem **trajectos** de qualquer comprimento $n \geq 1$. Mostra que existe $n_0 \geq 1$ tal que ϕ é válida em qualquer grafo em que existe pelo menos um **trajecto** de comprimento n_0.

6 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ϕ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de equivalência (i.e é reflexiva, simétrica e transitiva).

(b) Para cada $n \geq 2$ defina uma proposicão ψ_n de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi_n$ se e só se $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de equivalência com pelo menos n classes de equivalência.

(c) Mostra que não existe nenhuma proposição θ de $\mathcal{L}$ tal que os modelos de θ são exactamente as estruturas $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ em que $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de equivalência com um número finito de classes de equivalência.

7 Um **grafo (não dirigido)** $\mathcal{G}$ é um par (A, V) onde A é um conjunto não vazio e V é um conjunto de pares **não ordenados** de elementos **distintos** de A. Um subgrafo $\mathcal{G}' = (A', V')$ de $\mathcal{G}$ é um grafo tal que $A' \subseteq A$ e $V' \subseteq V$.

Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ϕ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é anti-reflexiva e simétrica. Justifica, informalmente, que tais estruturas são grafos (não dirigidos).

b) Um grafo $\mathcal{G} = (A, V)$ diz-se **completo** se e só se todos os pares de elementos de A estão em V e se $|A| = m$, designa-se por $\mathcal{K}_m$.

Para cada $n \geq 2$, define uma proposição ψ_n de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi \wedge \psi_n$ se e só se $\mathcal{A}$ é um grafo que contêm pelo menos um **subgrafo** $\mathcal{K}_n$ (i.e. um subgrafo completo com n elementos). Indica também, explicitamente, ψ_2 e ψ_3.

c) Mostra que não existe nenhuma proposição θ de $\mathcal{L}$ tal que os modelos de θ são exactamente as estruturas $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ que são grafos que contêm subgrafos completos $\mathcal{K}_n$, para qualquer $n > 1$.

8 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_1 = \{R\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{E, D\}$. Uma estrutura $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ representa uma árvore binária sempre que:

a) $|R^{\mathcal{A}}| = 1$ e neste caso $r \in R^{\mathcal{A}}$ diz-se a **raíz** de $\mathcal{A}$.

b) Diz-se que $a \in A$ é uma **folha** se não existe nenhum elemento $b \in A$ tal que $(a, b) \in E^{\mathcal{A}}$ ou $(a, b) \in D^{\mathcal{A}}$. Para qualquer $a \in A$, ou a é uma folha ou existem exactamente dois elementos **distintos** $b, c \in A$, tal que $(a, b) \in E^{\mathcal{A}}$ e $(a, c) \in D^{\mathcal{A}}$.

c) Para qualquer $a \in A$, $a \in R^{\mathcal{A}}$ ou existe exactamente um $b \in A$ tal que $(b,a) \in E^{\mathcal{A}}$ ou $(b,a) \in D^{\mathcal{A}}$.

i. Define fórmulas θ_1, θ_2 e θ_3 que exprimam respectivamente as condições a, b e c acima.

ii. Uma árvore binária tem **profundidade** n se existe pelo menos um caminho de comprimento n a partir da raíz r: i.e., existem $a_1,\ldots,a_n \in A$ tal que $(r,a_1) \in X_1^{A}$, $\ldots$,$(a_{n-1},a_n) \in X_n^{A}$, onde $X_i \in \{E,D\}$. Para $n = 1,2,3,\ldots$ define uma fórmula ψ_n tal que qualquer modelo $\mathcal{A}$ de $\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\} \cup \psi_n$ é uma árvore com profundidade maior ou igual a n.

iii. Mostra que não existe nenhuma proposição θ de $\mathcal{L}$ tal que os modelos de θ são exactamente as estruturas $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ que são árvores com profundidade infinita.

9 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ϕ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de **ordem parcial** (i.e é reflexiva, anti-simétrica e transitiva).

b) Um conjunto A com uma relação de ordem $R^{\mathcal{A}}$ é uma **cadeia** se para todos $x,y \in A$, $(x,y) \in R^{\mathcal{A}}$ ou $(y,x) \in R^{\mathcal{A}}$. Para cada $n \geq 2$ define uma proposicão ψ_n de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \phi \ \wedge \ \psi_n$ se e só se A é uma cadeia com pelo menos n elementos.

c) Mostra que não existe nenhuma proposição θ de $\mathcal{L}$ tal que os modelos de θ são exactamente as estruturas $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ em que A é uma cadeia com um número finito de elementos.

10 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade, $\mathcal{F}_0 = \{a\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\mathtt{g}\}$ e $\mathcal{R}_1 = \{Q\}$.

Dado um símbolo c, denota-se por $\{c\}^\star$, o conjunto de todas as sequências finitas do símbolo c, isto é, $\epsilon, c, cc, ccc, \ldots, c^n, \ldots$. A uma sequência finita de símbolos chamamos **palavra**. O **tamanho** de uma palavra w de $\{c\}^\star$, $|w|$, é o seu número de símbolos (i.e $|c^n| = n$ e $|\epsilon| = 0$).

Seja $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ uma estrutura de $\mathcal{L}$, tal que $A = \{c\}^\star$, $a^{\mathcal{A}} = \epsilon$ e $\mathtt{g}^{\mathcal{A}}(w) = cw$, $\forall w \in A$, e $Q^{\mathcal{A}} \subseteq A$.

(a) Para cada $n \geq 0$, define uma proposição θ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A}$ é modelo de θ se $Q^{\mathcal{A}}$ contém pelo menos uma palavra de tamanho n.

(b) Define um conjunto Σ de proposições de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{A}$ é um modelo se Σ se e só se $Q^{\mathcal{A}}$ contém palavras de qualquer tamanho.

(c) Mostra que não existe nenhuma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que os modelos de ψ são exactamente as estruturas $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ tal que $Q^{\mathcal{A}}$ contém palavras de qualquer tamanho.

2 Axiomatizações

11 Considerando a linguagem de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números obtém deduções naturais (com notação de Fitch) para as fórmulas ψ seguintes (i.e **PA** $\vdash \psi$). Para cada alinea podes considerar que as restantes correspondem a teoremas, que poderás usar.

Sugestão: Usa o Axioma 8 (principio da indução): sendo $\forall x Q(x)$ o que pretendes deduzir, deduz primeiro $Q(0)$ e depois $\forall x(Q(x) \to Q(x+1))$ (e aplicando o axioma 8 e **modus ponens** tens o que pretendes.)

1. $\forall x \; 0 + x = x$
2. $\forall x \; 1 \times x = x$
3. $\forall x \; 0 \times x = 0$

4. $\forall x\ x+1=1+x$
5. $\forall x\ x\times 1=x$
6. $\forall x\ x\times 1=1\times x$, começando por mostrar que $PA\vdash\forall x\ x\times 1=x$.
7. $\forall x\forall y\ (x+1)\times y=(x\times y)+y$
8. $\forall z\ \forall x\forall y\ (x+y)+z=x+(y+z)$, usando indução em z e começando por mostrar que $\forall x\ \forall y(x+y)+0=x+(y+0)$.
9. $\forall y\ \forall x\ (x+y=y+x)$, usando indução em y e começando por mostrar que $\forall x\ (x+0=0+x)$.
10. $\forall z\ \forall x\forall y\ (x\times y)\times z=x\times(y\times z)$, usando indução em z e começando por mostrar que $\forall x\ \forall y(x\times y)\times 0=x\times(y\times 0)$.
11. $\forall y\ \forall x\ (x\times y=y\times x)$, usando indução em y e começando por mostrar que $\forall x\forall y\ (x+1)\times y=(x\times y)+y$.

12 Seja $\mathcal{L}_N$ a linguagem de 1ª ordem com igualdade para os números naturais tal que $\mathcal{F}_0=\{0,1\}$ e $\mathcal{F}_2=\{+,\times\}$ (e onde os termos e as fórmulas atómicas são representados em notação infixa). Seja $\mathcal{N}=(\mathbb{N},\cdot^{\mathcal{N}})$ a estrutura onde $\cdot^{\mathcal{N}}$ associa aos símbolos funcionais os correspondentes valores e operações aritméticas. Considera ainda os axiomas de Peano, **PA**. Nota: Representa o número $\mathtt{2}$ pelo termo $\mathtt{1}+\mathtt{1}$.

a) – Define uma fórmula $\mathtt{Impar}(x)$ de $\mathcal{L}_N$ tal que $\mathcal{N}\models_s \mathtt{Impar}(x)$ se e só se $s(x)$ é impar, i.e se o resto da divisão inteira por 2 é 1.
   – Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que $\mathbf{PA}\vdash\mathtt{Impar}(\mathtt{1})$.

b) – Define uma fórmula $\mathtt{Par}(y)$ de $\mathcal{L}_N$, tal que $\mathcal{N}\models_s \mathtt{Par}(y)$ se e só se $s(y)$ é par.
   – Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que $\mathbf{PA}\vdash\mathtt{Par}(\mathtt{0})$.

c) – Define uma fórmula $\mathtt{Primo}(y)$ de $\mathcal{L}_N$, tal que $\mathcal{N}\models_s \mathtt{Primo}(y)$ se e só se $s(y)$ é primo.
   – Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que $\mathbf{PA}\vdash\mathtt{Primo}(\mathtt{2})$.

Axiomas de Peano (PA)

1. $\forall x(x+1\neq 0)$
2. $\forall x\forall y(x+1=y+1\to x=y)$
3. $0+1=1$
4. $\forall x\ x+0=x$
5. $\forall x\forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$
6. $\forall x\ x\times 0=0$
7. $\forall x\forall y\ x\times(y+1)=(x\times y)+x$
8. (princípio da indução) $(Q(0)\ \wedge\ \forall x(Q(x)\to Q(x+1)))\to\forall x Q(x)$

Lógica Computacional (CC2003) e Lógica e Programação (CC216)- Folha de trabalho n. 5

Resolução de exercícios selecionados

Resolução 4

1. ψ_0 pode ser $\neg F(s)$
2. Seja $R_{ab}(x,y)$ a fórmula $(R_a(x,y) \lor R_b(x,y))$. Então ψ_1 pode ser $\neg\exists x_1(R_{ab}(s,x_1) \land F(x_1))$ e ψ_n pode ser

$$\neg\exists x_1 \ldots \exists x_n((R_{ab}(s,x_1) \land R_{ab}(x_1,x_2) \land \ldots R_{ab}(x_{n-1},x_n) \land F(x_n))$$

3. $\Sigma = \{\psi_n \mid n \geq 0\}$
4. Suponhamos que existe θ. Então $\Sigma \models \theta$. Pelo teorema da compacidade existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ e Σ_0 finito tal que $\Sigma_0 \models \theta$. Mas sendo n_0 o maior índice das fórmulas ψ_i de Σ_0, Σ_0 tem um modelo, seja $\mathcal{A}_{n_0}$, que corresponde a uma autómato finito que aceita palavras de tamanho maior que n_0. E então θ também teria um modelo que aceitava alguma palavra. Absurdo!. Logo, θ não existe.

Resolução 11.??

1	$\forall x(x+1 \neq 0)$	
2	$\forall x \forall y(x+1 = y+1 \to x = y)$	
3	$0+1 = 1$	
4	$\forall x\; x+0 = x$	
5	$\forall x \forall y\; x+(y+1) = (x+y)+1$	
6	$\forall x\; x \times 0 = 0$	
7	$\forall x \forall y\; x \times (y+1) = (x \times y)+x$	
8	$(Q(0) \land (\forall x(Q(x) \to Q(x+1)))) \to \forall x Q(x)$	
9	$1 \times 0 = 0$	$\forall$E, 6
10	u $\quad 1 \times u = u$	
11	$\forall y\; 1 \times (y+1) = (1 \times y)+1$	$\forall$E, 7
12	$1 \times (u+1) = (1 \times u)+1$	$\forall$E, 7
13	$1 \times (u+1) = u+1$	=**E**, 10, 12
14	$1 \times u = u \to 1 \times (u+1) = u+1$	$\to$I, 10–13
15	$\forall x(1 \times x = x \to 1 \times (x+1) = x+1)$	$\forall$I, 10–14
16	$1 \times 0 = 0 \land \forall x(1 \times x = x \to 1 \times (x+1) = x+1)$	$\land$I, 9, 15
17	$\forall x 1 \times x = x$	$\to$E, 8, 16