Resolução de Exercícios Selecionados
Lógica Computacional

Nelma Moreira
Departamento de Ciência de Computadores
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
email: `nam@dcc.fc.up.pt`

2014

1 Semântica da Lógica Proposicional

Exercício 1.1. *Mostra a equivalência semântica das propriedades das operações lógicas dadas no curso: comutatividade e associatividade de* $\wedge$ *e* $\vee$ *; Leis de DeMorgan; distributividade de* $\wedge$ *em relação a* $\vee$ *(e vice-versa); idempotências de* $\wedge$ *e* $\vee$ *; dupla negação; expressao da implicaçao como uma disjunçao.* $\diamond$

Resolução 1.1

As duas primeiras são consequência imediata da definição. Para uma conjunção ser **V** têm de ambos os argumentos serem, independentemente da ordem. A disjunção só é **F** se ambos forem e portanto a ordem não interessa. Do mesmo modo se prova que são válidas as associatividades e as idempotências. Considere-se a primeira Lei de DeMorgan. Suponhamos que para uma valorização v_1 se tem $v_1(\neg(\phi \wedge \psi)) = \mathbf{V}$. Então $v_1(\phi \wedge \psi) = \mathbf{F}$ o que significa que $v_1(\phi) = \mathbf{F}$ ou $v_1(\psi) = \mathbf{F}$. Isto é exactamente dizer que $v_1(\neg\phi) = \mathbf{V}$ ou $v_1(\neg\psi) = \mathbf{V}$, ou ainda $v_1(\neg\phi \vee \neg\psi) = \mathbf{V}$. Então provámos que

$\neg(\phi \ \wedge \ \psi) \models \neg\phi \ \vee \ \neg\psi$. A conseuência oposta ($\neg\phi \ \vee \ \neg\psi \models \neg(\phi \ \wedge \ \psi)$) prova-se de maneira análoga.

O mesmo racíocinio se aplica para a segunda lei de DeMorgan e análogo para as distributividades.

Para a dupla negação basta notar que para uma valorização v_1, $v_1(\neg\neg\phi) = \mathbf{V}$ se e só se $v_1(\neg\phi) = \mathbf{F}$ se e só se $v_1(\phi) = \mathbf{V}$.

Para a última equivalência seja $v_1(\phi \to \psi) = \mathbf{V}$. Temos 2 casos a considerar. Se $v_1(\phi) = \mathbf{V}$ então $v_1(\psi) = \mathbf{V}$. Portanto, $v_1(\neg\phi \ \vee \ \psi) = \mathbf{V}$. Se $v_1(\phi) = \mathbf{F}$, então $v_1(\neg\phi) = \mathbf{V}$, e também $v_1(\neg\phi \ \vee \ \psi) = \mathbf{V}$. Logo, $\phi \to \psi \models \neg\phi \ \vee \ \psi$. Para provar que $\neg\phi \ \vee \ \psi \models \phi \to \psi$, suponhamos que $v_1(\neg\phi \ \vee \ \psi) = \mathbf{V}$. Se $v_1(\phi) = \mathbf{V}$ então, necessariamente, $v_1(\psi) = \mathbf{V}$ e concluímos que $v_1(\phi \to \psi) = \mathbf{V}$. Se $v_1(\phi) = \mathbf{F}$ então, pela definição da semânyica da implicação temos $v_1(\phi \to \psi) = \mathbf{V}$. O que prova o que se queria.

Exercício 1.2. *Justifica a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, onde* Γ *e* Σ *representam conjuntos de fórmulas e* $\phi, \psi, \theta, \gamma$ *representam fórmulas da lógica proposicional:*

1. $\phi \models \psi \to \theta$ *e* $\gamma \models \psi$ *se e só se* $\phi, \gamma \models \theta$*;*

2. *Se* Σ *é satisfazível então existe uma fórmula* ϕ *tal que* $\Sigma \not\models \phi$*.*

$\diamond$

Resolução 1.2

1.

$\Rightarrow$: Queremos que $\phi, \gamma \models \theta$, isto é qualquer valorização que satistaz ϕ e γ também satisfaz θ. Suponhamos uma valorização v_1 tal que $v_1(\phi) = v_1(\gamma) = \mathbf{V}$ e temos que provar que $v_1(\theta) = \mathbf{V}$. Mas pela primeira hipótese, $v_1(\psi \to \theta) = \mathbf{V}$ e pela segunda $v_1(\psi) = \mathbf{V}$. Logo pela definição da valorização duma implicação, se o antecende é $\mathbf{V}$ e a implicação também entãoo consequente tem de ser $\mathbf{V}$. Logo, concluímos que $v_1(\theta) = \mathbf{V}$. $\Leftarrow$: Esta afirmação é falsa. Considera as variáveis proposicionais p e q e γ a fórmula p, ϕ a fórmula $p \to q$, θ a fórmula q e ψ a fórmula $\neg p$. É verdade que $\phi, \gamma \models \theta$ mas $\gamma \not\models \psi$.

2.

Suponhanmos, por contradição, que para toda a fórmula ϕ, se tem $\Sigma \models \phi$. Como Σ é satisfazível, seja v_1 uma valorização tal que $v_1(\Sigma) = \mathbf{V}$. Então para uma qualquer fórmula ϕ temos que $v_1(\phi) = \mathbf{V}$. Mas como por hipótese todas as fórmulas são consequência de Σ então também $v_1(\neg\phi) = \mathbf{V}$. Mas isto é uma contradição. Logo a afirmação é verdadeira.