Exame – Época Recurso — 2015–02–12 **Duração:** 2h30m **Cotação:** 20 valores

1. Justifica a veracidade ou a falsidade das afirmações seguintes (sem usar tabelas de verdade):
   (a) $\vdash (p \to s) \to ((\neg p \to s) \to s)$
   (b) $\models (p \to (s \vee \neg q)) \vee (q \to \neg p)$
   (c) $\neg\theta \vee \neg\psi \vdash \neg(\theta \wedge \psi)$
   (d) Sendo Γ e Σ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:
      1. $\Gamma \cup \Sigma$ é satisfazível.
      2. $\Gamma \cup \{\theta\}$ é satisfazível qualquer que seja a fórmula $\theta \in \Sigma$.
   (e) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade e com $\mathcal{R}_2 = \{S\}$. Considera a estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ com $A = \{1, 2\}$ e $R^{\mathcal{A}} = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Então, $\mathcal{A} \models_s \forall w(w \neq x \to S(x, w))$, para toda a interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$.
   (f) Sendo Γ um conjunto de fórmulas da lógica de primeira ordem e w uma variável que não ocorre livre em nenhuma fórmula de Γ. Se $\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \theta$ então $\Gamma \cup \{\exists w\psi\} \vdash \exists w\theta$.
   (g) Seja θ uma proposição duma linguagem de lógica de primeira ordem $\mathcal{L}$. Tem-se que $\models \theta$ se e só se existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \neg\theta$ e $\mathcal{B} \not\models \neg\theta$.

2. Considera o sistema dedutivo de dedução natural para a lógica proposicional, Γ um conjunto de fórmulas, θ e ψ fórmulas da lógica proposicional.
   (a) Diz o que significa $\Gamma \vdash \theta$.
   (b) Mostra que se $\Gamma \cup \{\neg\theta\} \vdash F$ então $\Gamma \vdash \theta$.
   (c) Justifica a veracidade ou a falsidade da afirmação $\theta \vee \psi \vdash \neg(\neg\theta \wedge \neg\psi)$.

3. Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se esta é ou não é um teorema da lógica de primeira ordem, quaisquer que sejam as fórmulas θ e ψ. No caso afirmativo, indica uma dedução natural da respectiva fórmula. Caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas θ e ψ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ que não seja seu modelo.
   (a) $\exists w(\theta \wedge \psi) \to (\forall w\theta \wedge \forall w\psi)$
   (b) $\forall x\psi \to (\exists x(\theta \to \neg\psi) \to \neg\forall x\theta)$

4. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.
   (a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ψ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de **ordem parcial** (i.e é reflexiva, anti-simétrica e transitiva).
   (b) Um conjunto A com uma relação de ordem $R^{\mathcal{A}}$ é uma **cadeia** se para todos $w, x \in A$, $(w, x) \in R^{\mathcal{A}}$ ou $(x, w) \in R^{\mathcal{A}}$. Para cada $n \geq 2$ define uma proposicão ϕ_n de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \psi \wedge \phi_n$ se e só se A é uma cadeia com pelo menos n elementos.
   (c) Mostra que não existe nenhuma proposição θ de $\mathcal{L}$ tal que os modelos de θ são exactamente as estruturas $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ em que A é uma cadeia com um número finito de elementos.

5. Considera a linguagem de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas $\mathcal{L}_N$ e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números.
   (a) Define uma fórmula $\texttt{Impar}(w)$ de $\mathcal{L}_N$ tal que $\mathcal{N} \models_s \texttt{Impar}(w)$ se e só se $s(w)$ é ímpar, i.e se o resto da divisão inteira por 2 é 1.
   Nota: Representa o número $\texttt{2}$ pelo termo $\texttt{1} + \texttt{1}$.
   (b) Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que **PA** $\vdash \neg\texttt{Impar}(\texttt{0})$.

6. Converte a proposição seguinte para forma clausal, começando por transformar em forma normal prenexa:
$\neg(\exists wS(w) \to \neg\forall w(\forall yQ(y, w) \to \neg\exists xQ(x)))$

	Introdução	**Eliminação**
$\land$	$\frac{\phi \quad \psi}{\phi\land\psi}\land\mathbf{I}$	$\frac{\phi\land\psi}{\phi}\land\mathbf{E}_1$ $\quad$ $\frac{\phi\land\psi}{\psi}\land\mathbf{E}_2$
$\lor$	$\frac{\phi}{\phi\lor\psi}\lor\mathbf{I}_1$ $\quad$ $\frac{\psi}{\phi\lor\psi}\lor\mathbf{I}_2$	$\dfrac{\phi\lor\psi \quad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\lor\mathbf{E}$
$\neg$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ F\end{array}}{\neg\phi}\neg\mathbf{I}$	$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\mathbf{E}$
F	$\dfrac{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \neg\phi\end{array}}{F}F\mathbf{I}(*)$	$\frac{F}{\phi}F\mathbf{E}$
$\to$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi\to\psi}\to\mathbf{I}$	$\frac{\phi \quad \phi\to\psi}{\psi}\to\mathbf{E}$
$=$	$\frac{}{t=t}=\mathbf{I}$	$\frac{t_1=t_2 \quad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]}=\mathbf{E}$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em ϕ
$\forall$	$\dfrac{\begin{array}{c}[v]\\ \vdots\\ \phi[v/x]\end{array}}{\forall x\ \phi}\forall\mathbf{I}$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\frac{\forall x\ \phi}{\phi[t/x]}\ \forall\mathbf{E}$ onde x é substituível por t em ϕ
$\exists$	$\frac{\phi[t/x]}{\exists x\ \phi}\ \exists\mathbf{I}$ onde x é substituível por t em ϕ	$\dfrac{\exists x\ \phi \quad \begin{array}{c}[v \quad \phi[v/x]]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}\ \exists\mathbf{E}$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Algumas regras derivadas NOTA: Podes usar mas deves demonstrá-las à parte.

$$\frac{\phi\to\psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\mathbf{MT} \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg\mathbf{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]\\ \vdots\\ F\end{array}}{\phi}\mathbf{RA} \qquad \frac{}{\phi\lor\neg\phi}\mathbf{TE}$$

Axiomas de Peano (PA)

1. $\forall x(x+1\neq 0)$
2. $\forall x\forall y(x+1=y+1\to x=y)$
3. $0+1=1$
4. $\forall x\ x+0=x$
5. $\forall x\forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$
6. $\forall x\ x\times 0=0$
7. $\forall x\forall y\ x\times(y+1)=(x\times y)+x$
8. (princípio da indução) $(Q(0)\land\forall x(Q(x)\to Q(x+1)))\to\forall xQ(x)$