Nome: ______________________________ Número: __________

I. Para cada pergunta indica com uma cruz qual a resposta correcta. Respostas **erradas** descontam.

1. Qual das seguintes fórmulas é equivalente a $\neg t \vee r \vee (t \wedge \neg r)$?
   A. $\neg(t \to (\neg(r \vee (t \to \neg r))$ B. $t \to (\neg r \to \neg(t \to r))$ C. $\neg(t \to (\neg(r \wedge (t \to r))))$
2. Qual das seguintes fórmulas é uma tautologia?
   A. $(s \vee \neg s) \to (s \wedge \neg q)$ B. $(s \vee \neg q) \to (s \wedge \neg s)$ C. $(s \wedge \neg s) \to (s \vee \neg q)$
3. Qual das seguintes consequências semânticas é válida?
   A. $(t \vee s) \to r, \neg r \models \neg t$ B. $t \to r, r \models \neg t$ C. $t, \neg t \to s \models \neg s$
4. Qual das seguintes deduções é uma dedução correcta de $t \to s \wedge r \vdash t \to s$?

A.

1	$t \to s \wedge r$	
2	t	$\to$E, 1
3	s	$\wedge$E, 1
4	$t \to s$	$\to$I, 2, 3

B.

1	$t \to s \wedge r$	
2	$t \to s$	$\wedge$E, 1

C.

1	$t \to s \wedge r$	
2	$\quad t$	
3	$\quad s \wedge r$	$\to$E, 1, 2
4	$\quad s$	$\wedge$E, 3
5	$t \to s$	$\to$I, 2—4

5. Qual dos seguintes conjuntos de fórmulas de lógica de primeira ordem é satisfazível?
   A. $\{\exists x R(x), \forall x \neg R(x)\}$ B. $\{\exists y \forall x T(x,y), \forall x \neg T(x,x)\}$ C. $\{\forall x \exists y T(x,y), \forall x \neg T(x,x)\}$
6. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de lógica de 1ª ordem com alfabeto $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{R}_1 = \{S\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{T\}$. Seja $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ uma estrutura tal que $A = \{1,2,3\}$, $S^{\mathcal{A}} = \{1,2\}$, $T^{\mathcal{A}} = \{(1,2),(2,2),(2,3)\}$ e $f^{\mathcal{A}}(1) = 2$, $f^{\mathcal{A}}(2) = 2$, $f^{\mathcal{A}}(3) = 2$. Qual das seguintes fórmulas é satisfazível em $\mathcal{A}$?
   A. $\forall x T(f(x), x)$ B. $\forall x (T(f(x), x) \to T(x,x))$ C. $\forall x \exists y (T(f(x), y) \to S(y))$
7. Sejam Σ e Γ conjuntos de fórmulas de lógica de 1ª ordem, $\Sigma \subseteq \Gamma$, e θ uma fórmula. Qual das seguintes afirmações é verdadeira:
   A. Se $\Gamma \models \theta$ então $\Gamma \cap \Sigma \models \theta$. B. Se $\Sigma \models \theta$ então $\Gamma \models \theta$. C. Se $\Gamma \models \theta$ então $\Sigma \models \theta$.

II. Para as perguntas seguintes, responde na folha de exame

8. Usando o sistema dedutivo DN mostra que $\vdash (\phi \vee \psi) \to (\neg\phi \to \psi)$. Anota todos os passos.
9. Mostra que um conjunto de fórmulas Γ é inconsistente **sse** existe uma fórmula ϕ tal que $\Sigma \vdash \phi$ e $\Sigma \vdash \neg\phi$.
10. Seja $\mathcal{L}_G$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade e apenas um símbolo relacional binário, i.e, $R_2 = \{R\}$. Qualquer estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um grafo dirigido. Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se todos os nós de $\mathcal{G}$ têm grau de entrada pelo menos 3.
11. Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se esta é ou não é um teorema da lógica de primeira ordem, quaisquer que sejam as fórmulas ϕ e ψ. No caso afirmativo, indica uma dedução natural da respectiva fórmula. Caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ϕ e ψ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ que não seja seu modelo.
    (a) $\forall x (\exists y \phi \to \forall y \phi)$
    (b) $\forall y (\psi \to \phi) \to (\exists y \neg\phi \to \exists y \neg\psi)$
12. Considerando a linguagem de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números obtém uma dedução natural para $\forall x\, x + 1 = 1 + x$.
13. Converte a proposição seguinte para forma clausal, começando por transformar em forma normal prenexa:
    $\neg(\exists x T(x) \to \neg\forall x (\forall z R(z,x) \to \neg\exists y R(y,x)))$

	Introdução	**Eliminação**
$\wedge$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi\wedge\psi}\wedge\mathbf{I}$	$\dfrac{\phi\wedge\psi}{\phi}\wedge\mathbf{E}_1 \qquad \dfrac{\phi\wedge\psi}{\psi}\wedge\mathbf{E}_2$
$\vee$	$\dfrac{\phi}{\phi\vee\psi}\vee\mathbf{I}_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi\vee\psi}\vee\mathbf{I}_2$	$\dfrac{\phi\vee\psi \quad \begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\vee\mathbf{E}$
$\neg$	$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ F\end{matrix}}{\neg\phi}\neg\mathbf{I}$	$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\mathbf{E}$
F	$\dfrac{\begin{matrix}\phi\\ \vdots\\ \neg\phi\end{matrix}}{F}F\mathbf{I}(*)$	$\dfrac{F}{\phi}F\mathbf{E}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\rightarrow\psi}\rightarrow\mathbf{I}$	$\dfrac{\phi \quad \phi\rightarrow\psi}{\psi}\rightarrow\mathbf{E}$
$=$	$\dfrac{}{t=t}=\mathbf{I}$	$\dfrac{t_1=t_2 \quad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]}=\mathbf{E}$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em ϕ
$\forall$	$\dfrac{\begin{matrix}[v]\\ \vdots\\ \phi[v/x]\end{matrix}}{\forall x\ \phi}\forall\mathbf{I}$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\dfrac{\forall x\ \phi}{\phi[t/x]}\forall\mathbf{E}$ onde x é substituível por t em ϕ
$\exists$	$\dfrac{\phi[t/x]}{\exists x\ \phi}\exists\mathbf{I}$ onde x é substituível por t em ϕ	$\dfrac{\exists x\ \phi \quad \begin{matrix}[v \quad \phi[v/x]]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\psi}\exists\mathbf{E}$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Algumas regras derivadas NOTA: Podes usar mas deves demonstrá-las à parte.

$$\frac{\phi\rightarrow\psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\mathbf{MT} \qquad \frac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{matrix}[\neg\phi]\\ \vdots\\ F\end{matrix}}{\phi}\mathbf{RA} \qquad \frac{}{\phi\vee\neg\phi}\mathbf{TE}$$

1. $\forall x(x+1\neq 0)$
2. $\forall x\forall y(x+1=y+1\rightarrow x=y)$
3. $0+1=1$
4. $\forall x\ x+0=x$
5. $\forall x\forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$
6. $\forall x\ x\times 0=0$
7. $\forall x\forall y\ x\times(y+1)=(x\times y)+x$
8. (princípio da indução) $(Q(0)\wedge\forall x(Q(x)\rightarrow Q(x+1)))\rightarrow\forall xQ(x)$