Lógica Computacional (CC2003) e Lógica e Programação (CC216)
Folha de trabalho n. 2

Lógica Proposicional: sistemas dedutivos

Os exercícios marcados com `Treino` são para realizar nas aulas de treino e não serão usados nas apresentações de trabalhos. Todas as deduções devem usar o sistema de dedução natural DN e a notação de Fitch dada nas aulas.

Observações para a obtenção de uma dedução duma fórmula ϕ

- Se a fórmula ϕ for uma implicação $\psi \to \theta$, supor ψ e deduzir θ; aplicando de seguida a regra da introdução da implicação.
- Por redução ao absurdo: supor $\neg\phi$ e deduzir F. Caso haja uma negação $\neg\psi$ nas premissas, poder-se-á deduzir ψ para obter F.
- Suponhamos que uma das premissas é $\phi \vee \psi$ e se pretender deduzir γ. Podemos: supor ϕ e deduzir γ, supor ψ e deduzir γ; aplicando de seguida a regra de eliminação da disjunção.
- Suponhamos que uma premissa é $\neg\phi$ e pretendemos obter **F** : podemos tentar obter ϕ e aplicar a regra da introdução de **F** .

Notar que cada passo da dedução tem de ser obtido por aplicação duma regra ou ser uma repetição duma fórmula já deduzida ou uma premissa.

1 `Treino` Indica se as seguintes deduções são válidas. Em caso afirmativo indica as regras usadas em cada passo. Se não for válida indica qual o passo em que não está correcta e se existe uma dedução correcta com as mesmas premissas e conclusão.

1	$p \vee q$	
2		p
3		p
4		q
5		q
6	$p \wedge q$	

1	$(p \wedge q) \vee r$	
2		$p \wedge q$
3		p
4		$p \vee r$
5		r
6		$p \vee r$
7	$p \wedge r$	

1	$\neg(p \vee \neg q)$	
2		$\neg q$
3		$p \vee \neg q$
4		**F**
5	$\neg\neg q$	
6	q	

1	$p \to q$	
2		p
3		q
4		$\neg p \vee q$
5	$\neg p \vee q$	

1	$p \to \neg p$	
2		p
3		$\neg p$
4		**F**
5	$\neg p$	

1	$\neg p \to \neg q$	
2		q
3		$\neg q$
4		**F**
5		p
6	$q \to p$	

2 Mostra que:

(a) `Treino` $\delta \to (\phi \to \psi), \neg\psi, \delta \vdash \neg\phi$;

(b) `Treino` $(\delta \wedge \neg\phi) \to \psi, \neg\psi, \delta \vdash \phi$;

(c) `Treino` $\vdash \phi \vee \psi \to \psi \vee \phi$;

(d) $\vdash (\delta \to \psi) \to ((\neg\delta \to \neg\phi) \to (\phi \to \psi))$;

(e) `Treino` $\vdash (\delta \to (\phi \to \psi)) \to (\phi \to (\delta \to \psi))$;

(f) $\vdash (\delta \wedge \phi) \to \phi$;

(g) $\vdash \delta \to (\delta \vee \phi)$;

(h) $\vdash \delta \to (\neg\phi \to \neg(\delta \to \phi))$;

(i) `Treino` $\vdash (\phi \to \delta) \to ((\neg\phi \to \delta) \to \delta)$;

(j) $\vdash ((\phi \to \delta) \to \delta) \to ((\delta \to \phi) \to \phi)$;

(k) $\vdash ((\phi \to \delta) \wedge (\delta \to \phi)) \to ((\phi \vee \delta) \to (\phi \wedge \delta))$;

(l) `Treino` $\delta, \phi \to \psi \vdash \phi \to (\delta \to \psi)$;

(m) $\delta, \neg\phi \vdash \neg(\delta \to \phi)$;

(n) `Treino` $\vdash (\delta \to \phi) \to (\neg\delta \vee \phi)$;

(o) $\vdash (\delta \to \phi) \to ((\neg\delta \to \phi) \to \phi)$;

(p) $\vdash \phi \to (((\psi \to \phi) \to \delta) \to \delta)$

(q) $\vdash ((\phi \to \delta) \to \delta) \to ((\delta \to \phi) \to \phi)$;

(r) $\vdash \phi \vee \phi \to \phi$;

(s) $\psi \wedge \theta \to \neg\delta, \phi \to \delta, \theta, \phi \vdash \neg\psi$;

(t) $\vdash ((\psi \vee \phi) \to (\neg\psi \to \phi))$;

(u) $\psi \vee \phi, \psi \to \delta, \neg\theta \to \neg\phi \vdash \delta \vee \theta$;

(v) $\vdash (\psi \to \phi) \to (\delta \vee \psi \to \delta \vee \phi)$

(w) $\vdash ((((\phi \to \psi) \to (\neg\delta \to \neg\gamma)) \to \delta) \to \theta) \to ((\theta \to \phi) \to (\gamma \to \phi))$;

(x) $(\psi \to \phi) \wedge (\phi \to \psi) \vdash (\psi \wedge \phi) \vee (\neg\psi \wedge \neg\phi)$;

(y) $(\psi \to \phi) \vee (\delta \to \gamma) \vdash (\psi \to \gamma) \vee (\delta \to \phi)$;

(z) $\psi \vdash (\psi \wedge \phi) \vee (\psi \vee \neg\phi)$;

Nota: Caso uses regras derivadas, terás que as mostrar separamente.

3 Indica quais das seguintes deduções são válidas e quais não são válidas:

(a) $\neg\delta, \delta \vee \phi \vdash \phi$;

(b) $\phi \wedge \neg\phi \vdash \neg(\delta \to \psi) \wedge (\delta \to \psi)$;

(c) $\neg(\neg\delta \vee \phi) \vdash \delta$;

(d) $\delta \vee \psi, \neg\psi \vee \phi \vdash \delta \vee \phi$;

(e) $\neg(\delta \to \psi) \vdash \psi \to \delta$;

(f) $\neg\phi \vdash \phi \to \psi$;

(g) $\vdash (\neg\delta \to \delta) \to \delta$;

(h) $\neg\delta \to \neg\psi \vdash \neg\psi \to \neg\delta$;

4 `Treino` Justifica a validade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, apresentando demonstrações ou contra-exemplos:

(a) se $\vdash \psi$, então $\delta_1, \ldots, \delta_n \vdash \psi$;

(b) se $\delta_1, \ldots, \delta_n \vdash \psi$, então $\vdash \psi$;

(c) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$, então $\delta_2, \delta_1 \vdash \psi$;

(d) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi \to \psi$ e $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;

(e) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi \to \psi$ e $\delta_1 \vdash \phi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;

(f) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \phi \to \psi$ e $\delta_1 \vdash \phi$, então $\delta_1 \vdash \psi$;

(g) se $\delta_1 \vdash \phi \to \psi$ e $\delta_2 \vdash \phi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;

(h) se $\delta, \delta \vdash \psi$ se e só se $\delta \vdash \psi$.

5 Mostra sem usar a completude de DN que:

(a) `Treino` $\neg(\delta_1 \wedge \delta_2) \dashv\vdash \neg\delta_1 \vee \neg\delta_2$

(b) `Treino` $\neg(\delta_1 \vee \delta_2) \dashv\vdash \neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2$;

(c) `Treino` $\delta_1 \to \delta_2 \dashv\vdash \neg\delta_1 \vee \delta_2$;

(d) `Treino` $\neg(\delta_1 \to \delta_2) \dashv\vdash \delta_1 \wedge \neg\delta_2$;

(e) $\neg\delta_1 \wedge \delta_2 \vdash \delta_1 \vee \delta_2$;

(f) $\neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2 \vdash \delta_1 \to \delta_2$;

(g) $\delta_1 \wedge \delta_2 \vdash \delta_1 \vee \delta_2$;

(h) $\delta_1 \wedge \neg\delta_2 \vdash \neg(\delta_1 \wedge \delta_2)$;

(i) $(\psi \wedge \phi) \wedge \delta \dashv\vdash \psi \wedge (\phi \wedge \delta)$;

(j) $(\psi \vee \phi) \vee \delta \dashv\vdash \psi \vee (\phi \vee \delta)$;

(k) `Treino` $\neg(\neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2) \dashv\vdash \delta_1 \vee \delta_2$;

(l) $\delta \to \phi \dashv\vdash (\delta \to (\delta \wedge \phi)) \wedge ((\delta \wedge \phi) \to \delta)$;

(m) $\delta_1 \to \delta_2 \dashv\vdash \neg(\delta_1 \wedge \neg\delta_2)$;

(n) $\delta \to \phi \dashv\vdash (\phi \to (\delta \vee \phi)) \wedge ((\delta \vee \phi) \to \phi)$;

(o) $\delta_1 \wedge \delta_2 \dashv\vdash \neg(\neg\delta_1 \vee \neg\delta_2)$;

(p) $(\delta \to \phi) \wedge (\phi \to \delta) \dashv\vdash (\delta \vee \phi) \to (\delta \wedge \phi)$;

(q) $(\delta \to \phi) \dashv\vdash (\neg\phi \to \neg\delta)$;

(r) $(\delta \to \phi) \wedge (\phi \to \delta) \dashv\vdash (\delta \vee \phi) \to (\delta \wedge \phi)$;

(s) $\phi \wedge (\delta \vee \psi) \dashv\vdash (\phi \wedge \delta) \vee (\phi \wedge \psi)$;

(t) $(\phi \vee \psi) \to \delta \dashv\vdash (\phi \to \delta) \wedge (\psi \to \delta)$

(u) $(\delta \vee \phi) \wedge (\delta \vee \psi) \dashv\vdash \delta \vee (\phi \wedge \psi)$;

(v) $\phi \to (\psi \wedge \delta) \dashv\vdash (\phi \to \psi) \wedge (\phi \to \delta)$

6 Completa a demonstração do teorema da integridade do sistema de dedução natural, verificando que se existe um passo p em que a fórmula não é consequência semântica das premissas assumidas em p esse passo não pode resultar da aplicação das seguintes regras:

(a) $\wedge$ **I**

(b) $\wedge$ **E**

(c) $\vee$ **I**

(d) $\vee$ **E**

(e) $\neg$**I**

(f) $\neg$**E**

7 `Treino` Um conjunto de fórmulas Σ diz-se *formalmente completo* se para qualquer fórmula δ se tem

$$\Sigma \vdash \delta \text{ ou } \Sigma \vdash \neg\delta$$

Mostra que um conjunto de fórmulas da lógica proposicional Σ é *formalmente completo* se e só se para qualquer variável proposicional p se tem:

$$\Sigma \vdash p \text{ ou } \Sigma \vdash \neg p$$

<u>Sugestão:</u> usa indução estrutural nas fórmulas da lógica proposicional.

8 Mostra, sem usar a completude de nenhum sistema de dedução, que qualquer que seja o conjunto de fórmulas da lógica proposicional Σ e δ uma fórmula, se tem:

(a) Se $\Sigma \vdash \neg\delta$ então $\Sigma \cup \{\delta\}$ é inconsistente.

(b) $\Sigma \models \delta$ se e só se $\Sigma \cup \{\neg\delta\}$ não é satisfazível.

(c) $\Sigma \cup \{\neg\delta\} \vdash \mathbf{F}$ se e só se $\Sigma \vdash \delta$

9 Justifica a veracidade ou a falsidade das afirmações seguintes. Caso a afirmação seja falsa, poderás apresentar um contra-exemplo.

(a) Sendo Σ um conjunto de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:

1. Σ é inconsistente.
2. $\Sigma \vdash \delta$ qualquer que seja a fórmula δ da lógica proposicional.

(b) Sendo Σ e Γ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:

1. $\Sigma \cup \Gamma$ é satisfazível.
2. $\Sigma \cup \{\delta\}$ é satisfazível qualquer que seja a fórmula $\delta \in \Gamma$.

(c) Sejam Σ e Γ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional . Então

$$\{\delta \mid \Sigma \cup \Gamma \vdash \delta\} = \{\delta \mid \Sigma \vdash \delta\} \cup \{\delta \mid \Gamma \vdash \delta\}.$$

10 Sejam Σ e Γ conjuntos de fórmulas da lógica proposicional tais que para qualquer fórmula δ se tem $\Sigma \vdash \delta$ ou $\Gamma \vdash \delta$.

(a) Mostra que $\Sigma \cup \Gamma$ é não satisfazível.

(b) Mostra que um dos conjuntos Σ ou Γ não é satisfazível.

11 Seja $\Sigma \cup \Gamma$ um conjunto de fórmulas do lógica proposicional, tal que para toda a fórmula δ se tem

$$\Sigma \vdash \delta \qquad \text{se e só se} \qquad \Gamma \vdash \delta.$$

Justifique a validade ou a falsidade de cada uma das afirmações seguintes, apresentando demonstrações ou contra-exemplos:

(a) Seja $\delta_1, \ldots, \delta_n$ é uma dedução de uma fórmula δ a partir do conjunto Σ. Então $\delta_1, \ldots, \delta_n$ é também uma dedução de δ a partir de Γ.

(b) Sejam $\overline{\Gamma} = \{\neg\delta \mid \delta \in \Gamma\}$ e $\delta_1, \ldots, \delta_n$ uma dedução de uma fórmula δ a partir do conjunto Γ, então $\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_n$ é uma dedução de $\neg\delta$ a partir do conjunto de hipóteses $\overline{\Gamma}$;

(c) Σ é satisfazível se e só se Γ é satisfazível.

Lógica Computacional (CC2003) e Lógica e Programação (CC216)
Folha de trabalho n. 2

	Introdução	**Eliminação**
$\wedge$	ϕ $\vdots$ ψ $\vdots$ $\phi \wedge \psi$ $\quad\wedge$I	$\vdots$ $\phi \wedge \psi$ $\vdots$ ϕ $\quad\wedge$E $\vdots$ $\phi \wedge \psi$ $\vdots$ ψ $\quad\wedge$E
$\vee$	$\vdots$ ϕ $\vdots$ $\phi \vee \psi$ $\quad\vee$I $\vdots$ ϕ $\vdots$ $\psi \vee \phi$ $\quad\vee$I	$\phi \vee \psi$ $\vdots$ ϕ $\vdots$ γ ψ $\vdots$ γ γ $\quad\vee$E
$\neg$	ϕ $\vdots$ **F** $\neg\phi$ $\quad\neg$I	$\vdots$ $\neg\neg\phi$ $\vdots$ ϕ $\quad\neg$E
F	ϕ $\vdots$ $\neg\phi$ $\vdots$ **F** $\quad$ **F I**	$\vdots$ **F** $\vdots$ ϕ $\quad$ **F E**
$\rightarrow$	ϕ $\vdots$ ψ $\phi \rightarrow \psi$ $\quad\rightarrow$I	ϕ $\vdots$ $\phi \rightarrow \psi$ $\vdots$ ψ $\quad\rightarrow$E