Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 3

Lógica de 1ª ordem

Linguagens, termos, fórmulas e semântica

1 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade e tal que $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$, $\mathcal{F}_2 = \{f, h\}$, $\mathcal{R}_1 = \{R, S\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{P, Q\}$.

i. O comprimento de um termo t é o comprimento da sequência de caracteres que o representa. Por exemplo, $f(a, h(a, a))$ tem comprimento 11.

(a) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com comprimento menor que 10 e em que um mesmo símbolo funcional não ocorre mais que uma vez.

(b) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com comprimento menor que 8.

ii. Indica, **justificando**, quais as seguintes expressões são termos de $\mathcal{L}$ e quais as que são termos de $\mathcal{L}$ fechados:

(a) $h(a, f(a, g(a), g(a)))$
(b) $f(h(x, g(g(a))), x)$
(c) $f(a, P(a, g(x)))$
(d) $h(g(f(a, a)), f(b, a))$
(e) $f(h(x, h(y, y)), g(g(b)))$
(f) $f(a, g(h(g(x), x(a))))$

iii. Para cada uma das seguintes fórmulas determina, **justificando**:

- quais têm ocorrências de variáveis livres e em que posição
- quais as fórmulas que são proposições
- quais as fórmulas atómicas que ocorrem em cada uma delas

(a) $\forall x\, Q(x, x) \,\wedge\, P(x, x)$
$R(a) \,\wedge\, \exists y(R(f(y, y)) \to P(a, y))$
$\forall x \forall y\; x = y \to \forall x Q(x, y)$

(b) $\forall x(Q(g(x), x) \to \exists y\, P(y, x))$
$\exists x(S(f(a, x)) \,\vee\, P(a, x)) \to \forall y\, P(y, a)$
$\forall x \exists y(Q(x, y) \to (Q(x, z) \,\wedge\, Q(z, y)))$

(c) $\neg S(x) \,\wedge\, \forall x\; g(x) = f(x, a)$
$R(a) \to \forall x \exists y\, (P(x, y) \,\vee\, Q(x, y))$
$\forall x \forall y\, R(x) \,\vee\, \exists z\; z = h(x, y)$

2 Considera a linguagem, $\mathcal{L}$ definida em 1. Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura da linguagem $\mathcal{L}$ da definida por:

- o domínio de $\mathcal{A}$ é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$
- $a^{\mathcal{A}} = 1$, $b^{\mathcal{A}} = 0$
- $g^{\mathcal{A}}(n) = n + 4$, $n \in \mathbb{N}$
- $h^{\mathcal{A}}(n, m) = n + m$, $f^{\mathcal{A}}(n, m) = n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}$
- $S^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é ímpar}\}$,$R^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$
- $P^{\mathcal{A}} = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n > m\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$

i. Para cada uma das seguintes proposições diz, **justificando** se é verdadeira ou falsa em $\mathcal{A}$

(a) (*) $\forall x \exists y\; f(x, y) = a$
(b) (*) $\exists x \exists y\; f(x, y) = a$

(c) (*) $\forall x \exists y\ f(x,y) = a \to \exists y \forall x f(x,y) = a$
(d) (*) $\exists x R(x) \to \forall x R(x)$
(e) $\forall x \exists y\ P(y,x)$
$\exists x \forall y\ P(y,x)$
$\forall x \exists y\ P(y,x) \to \exists y P(y,y)$
$\forall x\ S(x) \to \exists x S(x)$
(f) $\forall x (S(g(x)) \to S(x))$
$\forall x \exists y\ f(x,y) = a$
$\exists x \forall y\ f(x,y) = a$
$\forall x (S(x)\ \vee\ R(x)) \to (\forall x S(x)\ \vee\ \forall x R(x))$

ii. Considera as seguintes interpretações $s_i : Var \longrightarrow \mathbb{N}$ para $i = 1, 2, 3$ e onde:

- $s_1(x) = 2$, para todo $x \in Var$;
- $s_2(x) = 0$, para todo $x \in Var$.
- $s_3(x) = 2$, $s_3(y) = 1$ e $s_3(z) = 5$.

Para cada uma das fórmulas ϕ seguintes e cada uma das interpretações s_i, diz se $\mathcal{A} \models_{s_i} \phi$, para $i = 1, 2, 3$:

(a) (*) $\exists x \exists y\ f(x,y) = z$
(b) (*) $\exists z\ f(x,y) = z \to \forall y\ (S(y)\ \vee\ R(y))$
(c) $\forall x \exists y\ h(x,y) = z$
$\neg \forall x (x = a\ \vee\ x = y)$
(d) $\forall x (y = a\ \vee\ x = y)$
$\exists z\ f(x,y) = z \to \forall x (S(x)\ \vee\ R(x))$

3 Considera a linguagem, $\mathcal{L}$ definida em 1. Para cada uma das proposições seguintes indica uma estrutura de $\mathcal{L}$ onde ela é verdadeira e outra onde ela é falsa. Podes concluir que nenhuma das proposições ou das suas negações é uma fórmula válida?

(a) $\forall x \forall y\, x = y$
$\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$
(b) $\forall x\, x = a$
$\forall x \forall y (R(x) \to R(y))$
(c) $\exists z (g(z) \neq a \to \exists z (g(z) = a))$
$\forall x\, Q(x, g(x)) \leftrightarrow \exists x\, P(a,x)$
(d) $\forall y (\forall x (R(x) \to P(x,x)) \to (R(y) \to \forall x P(x,x)))$

4 a) Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de $1^{\underline{a}}$ ordem com igualdade e tal que $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g, h, f\}$, $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{R}_1 = \{S, T\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{R, Q\}$.

i. O **tamanho** de um termo t é o número de símbolos funcionais ou variáveis que ocorrem no termo. Por exemplo, o termo $f(g(x), a)$ tem tamanho 4.

(a) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com tamanho menor que 5 e em que um mesmo símbolo funcional não ocorre mais que uma vez.
(b) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com tamanho menor que 4.
(c) Determina todos os termos fechados de $\mathcal{L}$ com tamanho menor que 5, em que a única constante é b.

ii. Para cada uma das seguintes fórmulas determina, **justificando**:

- quais têm ocorrências de variáveis livres e em que posição
- quais as fórmulas que são proposições
- quais as fórmulas atómicas que ocorrem em cada uma delas

(a) $\forall x(R(x,y) \to \exists y \neg Q(x,y))$
$\forall x(S(g(x)) \lor Q(a,x)) \to \exists y R(y,x)$
$\forall x\, g(x) = x \to \neg(\forall z \exists y\, x \neq y \land S(z))$

(b) $(\forall x\, Q(x,a) \to S(x)) \land \forall x(\exists y R(y,a) \lor S(g(x)))$
$\forall x \forall z \neg x = z \to (\forall x S(h(x)) \land R(z,z))$
$\forall z \forall y(z \neq y \to (\forall x S(x) \land R(x, g(y))))$

b) Seja $\mathcal{A}$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ definida por:

- o domínio de $\mathcal{A}$ é o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$
- $a^{\mathcal{A}} = 0$, $b^{\mathcal{A}} = 4$
- $g^{\mathcal{A}}(n) = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$
- $h^{\mathcal{A}}(n) = n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$
- $f^{\mathcal{A}}(n) = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$
- $f^{\mathcal{A}}(n,m) = n - m$, $n, m \in \mathbb{Z}$
- $S^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ é par}\}$
- $T^{\mathcal{A}} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}$
- $Q^{\mathcal{A}} = \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \leq m\}$
- $R^{\mathcal{A}} = \{(-2,3),(5,4)\}$

i. Para cada uma das proposições ϕ seguintes determina usando a noção de satisfazibilidade se é verdadeira ou falsa em $\mathcal{A}$, i.e., se $\mathcal{A} \models_s \phi$ ou $\mathcal{A} \not\models_s \phi$, para toda a interpretação s:

(a) $\forall x \exists y\, g(x) = g(y)$
$\forall x \forall y\, g(x) = g(y)$
$\forall x(S(x) \to S(g(x)))$
$\forall x \forall y(R(x,y) \to Q(x,y))$

(b) $\forall x \exists y\, x = h(y)$
$\exists y \forall x\, x = h(y)$
$\forall x(S(x) \to \neg S(g(h(x))))$
$\forall x \forall y(R(x,y) \to (S(y) \lor \neg S(f(x,y))))$

(c) $\exists y \forall x f(x,y) = a$
$\exists y \exists x f(x,y) = a$
$\forall x(S(x) \to \neg S(g(x)))$
$\forall x \forall y(R(x,y) \to (S(y) \land S(g(y))))$

(d) $\exists y \forall x f(x) = y$
$\exists y \exists x f(x) = y$
$\forall x \forall y(Q(x,y) \to T(f(y,x)))$
$\forall x((T(x) \land S(x)) \to (Q(b, f(x)) \lor x = a)$

ii. Considera as seguintes interpretações $s_i : Var \longrightarrow \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, 3$ e onde:

- $s_1(z) = 2$, para todo $z \in Var$.
- $s_2(z) = 0$, para todo $z \in Var$.
- $s_3(z) = 4$, para todo $z \in Var$.

Para cada uma das fórmulas ϕ seguintes e cada uma das interpretações s_i, diz se $\mathcal{A} \models_{s_i} \phi$, para $i = 1, 2, 3$:

(a) $\exists x\, g(z) = x$
$\forall z\, z = a \lor z = b$

(b) $\forall x\, Q(z, g(x))$
$\neg(\forall z(z = a \lor z = b))$

(c) $\exists x\, f(z,x) = a$
$\forall z\, (z = a \lor z = b)$

(d) $\exists x T(f(z,x))$
$\forall z\, z = a \lor f(z) = a$

Lógica e Programação - Folha de trabalho n. 3

5 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e tal que $\mathcal{F}_0 = \{a, b\}$, $\mathcal{F}_1 = \{g\}$, $\mathcal{F}_2 = \{f\}$, $\mathcal{R}_2 = \{S\}$. Considera $\mathcal{A}$ a estrutura de $\mathcal{L}$ definida por:

- o universo de $\mathcal{A}$ é o conjunto de números inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$;
- $a^{\mathcal{A}} = 0$;
- $b^{\mathcal{A}} = 7$;
- $g^{\mathcal{A}}(n) = n^2$, para $n \in \mathbb{Z}$;
- $f^{\mathcal{A}}(n, m) = n - m$, para $n, m \in \mathbb{Z}$;
- $S^{\mathcal{A}} = \{(2, 1), (3, 3)\}$.

Sejam $x, y \in \mathcal{V}ar$ e $s_1, s_2 : \mathcal{V}ar \longrightarrow \mathbb{Z}$ interpretação tais que

$$\begin{cases} s_1(x) = 0 \\ s_1(y) = 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s_2(x) = 1 \\ s_2(y) = -1 \end{cases}$$

(a) Para cada um dos termos seguintes t determina $s_1(t)$ e $s_2(t)$.

i) $g(x)$
ii) $g(y)$
iii) $f(a, g(f(x, y)))$
iv) $g(g(f(b, b)))$
v) $f(a, a)$

(b) Para cada uma das fórmulas seguintes ϕ diz se $\mathcal{A} \models_{s_1} \phi$ e se $\mathcal{A} \models_{s_2} \phi$.

i) $S(f(x, y), x)$
$\exists x\, S(x, x)$
ii) $\forall x(x = a \vee y = b)$
$\exists y(f(y, x) = b)$
iii) $\neg\forall x(x = a \vee y = b)$
$\exists z\, S(z, x) \to \exists x\, S(x, x))$
iv) $\exists x(f(y, x) = a)$
$\forall z\ (z = x\ \vee\ z = y)$
v) $\forall y \forall z\ (f(y, z) = a \vee x \neq g(f(z, y))$
$\exists z\ ((f(x, y) = z \wedge S(z, x)) \to \exists x\, S(x, x))$

Semântica: caracterização de propriedades de modelos por proposições; formas normais

6 Seja $\mathcal{L}_G$ uma linguagem de 1ª ordem com igualdade, sem símbolos funcionais e apenas um símbolo relacional binário, i.e, $R_2 = \{R\}$. Qualquer estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um grafo dirigido, que podemos representar por $\mathcal{G} = (A, E)$.

i. (a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$ tal que uma estrutura $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}_G$ é um modelo de ϕ se e só se $\mathcal{G}$ for um grafo dirigido sem vértices isolados.

(b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg\phi$

ii. Diz-se $\mathcal{G}$ tem um **trajecto** de comprimento $n \geq 1$ se e só se existem $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$, **todos distintos** tal que $(a_0, a_1) \in V$, $(a_1, a_2) \in E$, ..., $(a_{n-1}, a_n) \in E$.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se $\mathcal{G}$ tem um **trajecto** de comprimento 3.

(b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg\phi$.

iii. Seja $\mathcal{G} = (A, E)$ um grafo dirigido. Um arco $(a, b) \in E$ é incidente no nó $b \in A$. O **grau de entrada** de um nó é o número de arcos incidentes nele.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se todos os nós de $\mathcal{G}$ têm grau de entrada pelo menos 3.

(b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg\phi$

iv. Seja $\mathcal{G} = (A, E)$ um grafo dirigido. Dizemos que existe um ciclo de comprimento $n \geq 1$ em $\mathcal{G}$ se e só se existirem nós $a_1, \ldots, a_n \in A$ tais que $(a_1, a_2) \in E, \ldots, (a_n, a_1) \in E$.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se $\mathcal{G}$ **não** tiver ciclos de comprimento 3.

(b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg\phi$

v. Um grafo $\mathcal{G} = (A, E)$ é não dirigido se E é uma relação binária simétrica. Num grafo não dirigido o grau de um nó A é o número de arestas incidentes em a. Um grafo não dirigido é n-regular se todos os nós têm grau n.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_G$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é um modelo para ϕ se e só se for não dirigido e 2-regular.

(b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_G$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ tal que $\mathcal{G}_1 \models \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \neg\phi$

vi. Um grafo não dirigido $\mathcal{G}$ é um par (A, E) onde A é um conjunto não vazio (nós) e E é um conjunto de pares **não ordenados** de elementos **distintos** de A (arestas).

(a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{G} = (A, .^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ψ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é anti-reflexiva e simétrica. Justifica, informalmente, que tais estruturas são grafos (não dirigidos).

(b) Num grafo não dirigido o grau de um nó $a \in A$ é o número de arestas incidentes em a. Um grafo não dirigido é um *círculo* se todos os seus nós têm grau 2.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$, tal que um grafo $\mathcal{G}$ é modelo para $\psi \wedge \phi$ se e só se for um círculo.

(b) Indica, **justificando** duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, tal que $\mathcal{G}_1 \models \psi \wedge \phi$ e $\mathcal{G}_2 \models \psi \wedge \neg\phi$

7 Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R\}$.

i (a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, .^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ψ se e só se a relação $R^{\mathcal{A}}$ é uma relação de **ordem parcial** (i.e é reflexiva, anti-simétrica e transitiva).

(b) Um conjunto A com uma relação de ordem $R^{\mathcal{A}}$ é uma **cadeia** se para todos $x, y \in A$, $(x, y) \in R^{\mathcal{A}}$ ou $(y, x) \in R^{\mathcal{A}}$. Define uma proposicão ϕ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \psi \ \wedge \ \phi$ se e só se A é uma cadeia com pelo menos 3 elementos.

ii Seja A um conjunto com uma relação de ordem parcial $R^{\mathcal{A}}$. Dados dois elementos $a, b \in A$ dizemos que a é **menor** do que b se $(a, b) \in R^{\mathcal{A}}$. Dados dois elementos a e b de A, seja $s \in A$ menor do que a e que b. Dizemos que s é um **ínfimo** de a e b se sempre que houver outro elemento $s' \in A$ nas mesmas condições, então s' é menor do que s.

Dizemos que A é um **reticulado inferior** se para cada dois elementos de a e b de A, existe um elemento $c \in A$ que é **ínfimo** de a e b.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}$, tal que um conjunto A é um reticulado inferior se e só se $\mathcal{A}$ é modelo para $\psi \wedge \phi$, onde ψ é definido como em 7.a.

(b) Indica, **justificando** duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, tal que $\mathcal{A}_1 \models \psi \wedge \phi$ e $\mathcal{A}_2 \models \psi \wedge \neg\phi$. Caso queiras poderás representar $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ por diagramas de Hasse.

8 seja $\mathcal{L}_A$ uma linguagem de $1^{\underline{a}}$ ordem com igualdade e $R_1 = \{I, F\}$, $R_2 = \{R_a, R_b\}$. Uma estrutura $\mathcal{A}$ para $\mathcal{L}_A$ é um autómato finito não determinístico sobre $\{a, b\}$ se e só se $|I^A| = 1$.

(a) Define uma proposição ϕ de $\mathcal{L}_A$ tal que uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}_A$ é um modelo de ϕ se e só se $\mathcal{A}$ é um autómato finito determinístico.

(b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ tal que $\mathcal{A}_1 \models \phi$ e $\mathcal{A}_2 \models \neg\phi$.

(c) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}_A$ tal que uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}_A$ é um modelo de ψ se e só se $\mathcal{A}$ é um autómato finito que reconhece alguma palavra de $\Sigma = \{a, b\}$ de comprimento 2.

(d) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}_A$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ tal que $\mathcal{A}_1 \models \psi$ e $\mathcal{A}_2 \models \neg\psi$

9 Para cada par de fórmulas seguinte mostra, usando as definições, que as fórmulas são válidas ou, caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ϕ e ψ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{A}$ não é modelo da fórmula correspondente.

(a) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$
$(\forall x\phi \to \forall x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$

(b) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x\phi \to \forall x\psi)$
$(\exists x\phi \to \exists x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$

(c) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x\phi \to \exists x\psi)$
$(\exists x\phi \to \forall x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$

(d) $\forall x\exists y(\phi \vee \psi) \to \exists x\forall y(\phi \wedge \psi)$
$\forall x(\psi \vee \phi) \to \neg\exists x(\neg\psi \wedge \neg\phi)$

(e) $\exists x\neg(\phi \vee \psi) \to \exists x(\neg\phi \vee \neg\psi)$
$\exists y(\phi \wedge \psi) \to (\forall y\phi \wedge \forall y\psi)$

10 Para cada um dos termos e fórmulas indicados determina as substituições e quais as variáveis que são substituíveis por t em ϕ:

(a) $\neg(\forall x\exists yP(x, y, z) \ \wedge \ \forall zP(x, y, z))$ e t o termo $g(f(y, y)), y)$ para $\phi[t/x]$, $\phi[t/y]$ e $\phi[t/z]$.

(b) $\forall x\exists yQ(x, z) \ \wedge \ \exists zP(z, y)$ e t o termo $f(h(x, y), y)$ para $\phi[t/x]$, $\phi[t/y]$ e $\phi[t/z]$.

(c) $x \neq g(y) \to \exists z(P(z) \to R(x, y))$ e t o termo $g(y)$ para $\phi[t/x]$.

(d) $\exists xS(x, x) \vee \exists z(P(z) \wedge R(x, z))$ e t o termo $h(x, y, z)$ para $\phi[t/x]$.

(e) $\forall x\exists y\, Q(x, y) \wedge P(x, y, y)$ e t o termo y para $\phi[t/x]$.

11 Para cada uma das fórmulas seguintes determina uma forma normal prenexa de

(a) $\neg\forall xR(x, u) \ \wedge \ \exists y(\neg\forall xR(y, x) \to Q(u, y))$

(b) $\forall x\neg\exists y\forall uP(x, y) \to \neg(\exists zP(x, y) \to \forall yP(u, y))$

(c) $\exists xS(x, x) \vee \exists z(P(z) \wedge \forall xR(x, z))$

(d) $\neg(\exists xQ(x, y) \to \neg\forall x(\forall zP(z, y, x) \to \neg\exists yP(y)))$

(e) $\neg(\forall xR(x, y) \to \exists x\neg(\exists zQ(z, y, x) \to \forall yP(y)))$

Resolução de exercícios selecionados (*)

Resolução 1.i

(a) Pretende-se que para qualquer interpretação $s : Var \longrightarrow \mathbb{N}$,

$$\mathcal{A} \models_s \forall x\exists y\ f(x, y) = a \tag{1}$$

Iremos usar indutivamente a definição de $\models_s$.

Por `(vii)`, (1) é verdade, se para todo o $n \in \mathbb{N}$ se tem

$$\mathcal{A} \models_{s[n/x]} \exists y\ f(x, y) = a \tag{2}$$

Por `(viii)`, (2) é verdade, se existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s[n/x][m/y]} f(x,y) = a \tag{3}$$

Por `(i)`, (3) é verdade, se

$$s[n/x][m/y](f(x,y)) = s[n/x][m/y](a) \tag{4}$$

Mas, pela definição de interpretação estendida a termos e de $s[a/x]$ para a pertencente ao domínio de $\mathcal{A}$,

$$s[n/x][m/y](f(x,y)) = f^{\mathcal{A}}(s[n/x][m/y](x), s[n/x][m/y](y)) = f^{\mathcal{A}}(n,m) = n \times m$$

e $s[n/x][m/y](a) = a^{\mathcal{A}} = 1$

Em resumo, (1) é verdade se

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \times m = 1$.

o que é **Falso**. Por exemplo, para $n = 3$ ter-se-ia $m = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$.

(b) Analogamente se obteria, para qualquer interpretação s

$$\mathcal{A} \models_s \exists x \exists y\, f(x,y) = a \tag{5}$$

se e só se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $n \times m = 1$.

o que é **Verdade**, por exemplo para $n = 1$ e $m = 1$.

(c) Pretende-se que, para qualquer interpretação s

$$\mathcal{A} \models_s \forall x \exists y\, f(x,y) = a \to \exists y \forall x f(x,y) = a \tag{6}$$

Por `(vi)` da definição de $\models_s$, (6) é verdade se

$$\mathcal{A} \not\models_s \forall x \exists y\, f(x,y) = a \text{ ou } \mathcal{A} \models_s \exists y \forall x f(x,y) = a$$

Pela alínea (a), vimos que não é verdade que $\mathcal{A} \models_s \forall x \exists y\, f(x,y) = a$, logo $\mathcal{A} \not\models_s \forall x \exists y\, f(x,y) = a$ é verdade. E também (6).

(d) Pretende-se que, para qualquer interpretação s

$$\mathcal{A} \models_s \exists x R(x) \to \forall x R(x) \tag{7}$$

Por `(vi)` da definição de $\models_s$, (7) é verdade se

$$\mathcal{A} \not\models_s \exists x R(x) \text{ ou } \mathcal{A} \models_s \forall x R(x)$$

Vamos determinar se $\mathcal{A} \models_s \exists x R(x)$. Isto é verdade, se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s[n/x]} R(x) \tag{8}$$

Por `(ii)`, (8) é verdade se

$$s[n/x](x) \in R^{\mathcal{A}} \tag{9}$$

Como $s[n/x](x) = n$, vem que (8) é verdade se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que n é par o que é **Verdade**. Então $\mathcal{A} \not\models_s \exists x R(x)$ é **Falso**.

Temos que analisar a veracidade de $\mathcal{A} \models_s \forall x R(x)$. Analogamente obtemos que é verdade se

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, n é par

o que também é **Falso**. Donde (7) é **Falsa**.

Resolução 2ii

(a) Sendo s_1 uma interpretação que atribuí o valor 2 a qualquer variável, pretende-se que

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \exists x \exists y \; f(x,y) = z \tag{10}$$

Isto é verdade se, existe um $n \in \mathbb{N}$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/x][m/y]} f(x,y) = z \tag{11}$$

Isto é se,

$$s_1[n/x][m/y](f(x,y) = s_1[n/x][m/y](z) \tag{12}$$

Mas $s_1[n/x][m/y](f(x,y) = f^{\mathcal{A}}(n,m) = n + m$ e $s_1[n/x][m/y](z) = s_1(z) = 2$

Então (10) é verdade se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ e existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \times n = 2$

o que é **Verdade**. Basta tomar $n = 2$ e $m = 1$.

(b) Sendo s_1 uma interpretação que atribuí o valor 2 a qualquer variável, pretende-se que

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \exists z \; f(x,y) = z \to \forall y \; (S(y) \;\vee\; R(y)) \tag{13}$$

Mais uma vez isto é verdade se $\mathcal{A} \not\models_{s_1} \exists z \; f(x,y) = z$ ou se $\mathcal{A} \models_{s_1} \forall y \; (S(y) \;\vee\; R(y))$

Temos que:

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \exists z \; f(x,y) = z \tag{14}$$

se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/z]} f(x,y) = z \tag{15}$$

Isto é se,

$$s_1[n/z](f(x,y)) = s_1[n/z](z) \tag{16}$$

e $s_1[n/z](f(x,y)) = f^{\mathcal{A}}(s_1[n/z](x), s_1[n/z](y)) = f^{\mathcal{A}}(s_1(x), s_1(y)) = 2 + 2$ e $s_1[n/z](z) = n$

Então (14) é verdade se

Existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \times 2 = n$

o que é **Verdade**. Tomar $n = 4$.

Mas então $\mathcal{A} \not\models_{s_1} \exists z \; f(x,y) = z$ é **Falso**.

Temos que

$$\mathcal{A} \models_{s_1} \forall y \; (S(y) \;\vee\; R(y)) \tag{17}$$

se, para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} (S(y) \;\vee\; R(y)) \tag{18}$$

Por `(v)` da definição de $\models_s$, (18) é verdade se $\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} S(y)$ ou $\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} R(y)$

$$\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} S(y) \tag{19}$$

se

$$s_1[n/y](y) \in S^{\mathcal{A}} \tag{20}$$

isto é se n é ímpar.

Analogamente $\mathcal{A} \models_{s_1[n/y]} R(y)$, se n é par. Então, (17) é verdade se

Para todo o $n \in \mathbb{N}$, n é ímpar ou n é par

o que é **Verdade**. Nota que é importante a disjunção estar no âmbito do quantificador e não o rário: é falso que *para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* n *é ímpar ou para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* n *é par*.

Finalmente, temos que (13) é **Verdade**.