Lógica Computacional (CC2003)- Folha de trabalho n. 4

1 Sistema de dedução natural DN para a lógica de 1ª ordem

Observações para a obtenção de uma dedução duma fórmula ϕ

- Se a fórmula ϕ for uma implicação $\psi \to \theta$, supor ψ e deduzir θ; aplicando de seguida a regra da introdução da implicação.
- Por redução ao absurdo: supor $\neg\phi$ e deduzir F. Caso haja uma negação $\neg\psi$ nas premissas, poder-se-á deduzir ψ para obter F.
- Suponhamos que uma das premissas é $\phi \lor \psi$ e se pretender deduzir γ. Podemos: supor ϕ e deduzir γ, supor ψ e deduzir γ; aplicando de seguida a regra de eliminação da disjunção.
- Suponhamos que uma premissa é $\neg\phi$ e pretendemos obter $\mathbf{F}$: podemos tentar obter ϕ e aplicar a regra da introdução de $\mathbf{F}$.
- Se uma premissa for $\exists x\phi$ e se pretende deduzir γ. Podemos: com uma variável nova v supor $\phi[v/x]$ e deduzir γ (sendo que em γ v não pode ocorrer). Depois aplicar a regra da introdução de $\exists$.

Notar que cada passo da dedução tem de ser obtido por aplicação duma regra ou ser uma repetição duma fórmula já deduzida ou uma premissa.

1 Indica se as seguintes deduções são válidas. Em caso afirmativo indica as regras usadas em cada passo. Se não for válida indica qual o passo em que não está correcta e se existe uma dedução correcta com as mesmas premissas e conclusão.

1	$\forall x(P(x) \lor Q(x))$		
2	u	$P(u) \lor Q(u)$	
3		$P(u)$	
4	$\forall x P(x)$		
5	$\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$		

1	$\forall x\ (P(x) \to Q(x))$		
2	$\exists x\ P(x)$		
3	v	$P(v)$	
4		$P(v) \to Q(v)$	
5		$Q(v)$	
6	$\exists x\ Q(x)$		

1	$\exists x\ P(x)$		
2	u	$P(u)$	
3	$\forall x\ P(x)$		

2 Usando o sistema de dedução natural para a lógica de 1ª ordem e sem usar a completude, mostra em notação de Fitch:

(a) $\forall x(R(x) \land S(x)) \vdash \forall x\ R(x) \land \forall x S(x)$

(b) $\forall x(R(x) \to S(x)) \vdash \forall x R(x) \to \forall x S(x)$

(c) $\exists x(R(x) \land S(x)) \vdash \exists x R(x) \land \exists x S(x)$

(d) $\forall x(P(x) \lor Q(x)), \exists x\neg Q(x), \forall x(R(x) \to \neg P(x)) \vdash \exists x\neg R(x)$

(e) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \lor R(x))), \neg\exists x(P(x) \land R(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$

(f) $\exists x\exists y(P(x,y) \lor P(y,x)) \vdash \exists x\exists y P(x,y)$

(g) $\exists x(P(x) \land Q(x)), \forall x(P(x) \to R(x)) \vdash \exists x(R(x) \land Q(x))$

(h) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \land \forall x\forall y(P(x) \land P(y) \to x = y)$, onde $\psi \leftrightarrow \phi$ é uma abreviatura de $\psi \to \phi$ e $\phi \to \psi$

(i) $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \to y = x)) \vdash \forall x\forall y((P(x) \land P(y)) \to x = y)$

(j) $\forall x P(a,x,x), \forall x\forall y\forall z(P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))) \vdash P(f(a),a,f(a))$

(k) $\exists x\exists y(H(x,y) \lor H(y,x)), \neg\exists x H(x,x) \vdash \exists x\exists y\neg(x = y)$

(l) $\forall x\forall y R(x,y) \vdash \forall y\forall x R(x,y)$

(m) $\vdash \forall x\forall y\forall u\forall v((x = u \land y = v) \to (P(x,y) \to P(u,v)))$

(n) $\exists y \exists x Q(y,x) \vdash \exists x \exists y Q(y,x)$
(o) $\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)$
(p) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$
(q) Se x não ocorre livre em ϕ, $\exists x\psi \vee \phi \dashv\vdash \exists x(\psi \vee \phi)$
(r) $\vdash \forall x \forall y x = y \to f(x) = f(y)$
(s) $\vdash x = f(y) \to (\forall z P(x,z) \to P(f(y),z))$
(t) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v((x = u \wedge y = v) \to f(x,y) = f(u,v)))$
(u) $\vdash \forall x \forall y(f(x) \neq f(y) \to x \neq y)$
(v) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \to (y = v \to f(x,y) = f(u,v)))$
(w) $\vdash \exists x(\psi \to \phi) \to (\forall x\psi \to \exists x\phi)$
(x) $\vdash (\exists x\psi \to \forall x\phi) \to \forall x(\psi \to \phi)$
(y) $\vdash \forall x(\psi \to \phi) \to (\exists x\neg\phi \to \exists x\neg\psi)$
(z) $\vdash \forall x(\neg\psi \to \phi) \to (\exists x\neg\phi \to \exists x\psi)$

3 Seja Σ um conjunto de fórmulas de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ tal que x não ocorre livre em nenhuma fórmula de Σ. Mostra que,

(a) se $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$ e x não ocorre livre em ψ, então $\Sigma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \psi$;
(b) se $\Sigma \cup \{\phi\} \vdash \psi$, então $\Sigma \cup \{\exists x\phi\} \vdash \exists x\psi$.

Completude e integridade da lógica 1ª ordem.

4 Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se é ou não um teorema da lógica de 1ª ordem, quaisquer que sejam as fórmulas ψ e ϕ. Justifica, mostrando que existe uma dedução natural da respectiva fórmula (sem usar a completude da lógica de 1ª ordem), ou então indicando uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ψ e ϕ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{A}$ não é modelo da fórmula correspondente.

(a) (*) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$
$(\forall x\phi \to \forall x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$
(b) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x\phi \to \forall x\psi)$
$(\exists x\phi \to \exists x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$
(c) $\forall x(\phi \to \psi) \to (\exists x\phi \to \exists x\psi)$
$(\exists x\phi \to \forall x\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$
(d) $\forall x \exists y(\phi \vee \psi) \to \exists x \forall y(\phi \wedge \psi)$
$\forall x(\psi \vee \phi) \to \neg\exists x(\neg\psi \wedge \neg\phi)$
(e) $\exists x\neg(\phi \vee \psi) \to \exists x(\neg\phi \vee \neg\psi)$
$\exists y(\phi \wedge \psi) \to (\forall y\phi \wedge \forall y\psi)$
(f) $(\forall x\psi \vee \forall x\phi) \to \exists x(\psi \vee \phi)$
$\forall x \exists y\psi \to \exists y \forall x\psi$
(g) $(\exists x\psi \wedge \exists x\phi) \to \exists x(\psi \wedge \phi)$
$\exists x(\neg\psi \wedge \neg\phi) \to \exists x(\neg(\psi \wedge \phi))$
(h) $\forall x(\psi \to \phi) \to (\exists x\psi \to \exists x\phi)$
$\exists x \exists y(\phi \vee \psi) \to \forall y \exists x(\phi \vee \psi)$
(i) $\exists x \forall y\psi \to \exists x \exists y\psi$
$\forall x \exists y(\phi \wedge \psi) \to \exists x \forall y(\phi \wedge \psi)$
(j) $\forall x(\psi \to \neg\phi) \to \neg\exists x(\psi \wedge \phi)$
$(\exists x\phi \vee \exists x\psi) \to \exists x(\phi \wedge \psi)$

(k) $\forall x(\neg\psi \to \phi) \to (\exists x\neg\phi \to \exists x\psi)$
$\neg(\forall x\exists y\psi \to \exists y\forall x\psi)$

(l) $\exists x\,\neg(\psi \lor \phi) \to \exists y(\neg\psi \lor \neg\phi)[y/x]$, onde y não ocorre em ψ nem ϕ.
$(\exists x\,\neg\phi \to \exists x\,\neg\psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$.

(m) $\forall x(\psi \to \phi) \to (\exists x\neg\phi \to \exists x\neg\psi)$
$(\exists x\phi \lor \exists x\psi) \to \exists x(\phi \land \psi)$

(n) $(\exists x\psi \lor \exists x\phi) \to \exists x(\psi \lor \phi)$
$\exists x(\psi \lor \phi) \to (\exists x\psi \lor \exists x\phi)$

(o) $\exists x(\psi \to \phi) \to (\forall x\psi \to \exists x\phi)$
$(\forall x\psi \to \exists x\phi) \to \exists x(\psi \to \phi)$

5 Completa a demonstração do teorema da integridade do sistema de dedução natural para a lógica de 1ª ordem, verificando que se no passo de indução a regra a aplicar for uma das seguintes, a fórmula resultante é consequência semântica das premissas aí assumidas:

(a) $\forall$**E** ou $\exists$**I**
(b) $=$ **E** ou $\to$ **I**
(c) $\forall$**I** ou $\land$ **E**
(d) $\lor$ **E** ou $\neg$**I**
(e) $\lor$ **I** ou **F I**

6 Seja ψ uma proposição de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$. Relaciona as afirmações seguintes, indicando se são equivalentes ou se apenas uma implica a outra **justificando**.

(a) – existe uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ e uma interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \not\models_s \neg\psi$;
– ψ é uma fórmula válida.

(b) – $\vdash \psi$
– $\neg\psi$ é falso em todas as estruturas de $\mathcal{L}$.

(c) – $\models \psi$
– existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \neg\psi$ e $\mathcal{B} \not\models \neg\psi$.

7 Seja ψ uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ para a qual existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tais que $\mathcal{A} \models_s \psi$ para toda a interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \not\models_t \psi$ para toda a interpretação t das variáveis em $\mathcal{B}$. Justifica a validade ou falsidade das afirmações seguintes:

– ψ é uma proposição;
– ψ não é uma fórmula válida;
– $\neg\psi$ não é uma fórmula válida.

8 Um conjunto consistente Δ diz-se maximal se para qualquer fórmula ψ se tem ou $\psi \in \Delta$ ou $\neg\psi \in \Delta$. Mostra que se Δ é um conjunto consistente maximal e $\Delta \vdash \theta$, então $\theta \in \Delta$.

9 Um conjunto Σ de proposições de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ diz-se completo (em $\mathcal{L}$) se e só se para toda a proposição ψ de $\mathcal{L}$ se tem $\psi \in \Sigma$ ou $\neg\psi \in \Sigma$. Mostra que um conjunto consistente Σ é completo se e só se para toda a proposição ψ de $\mathcal{L}$, se $\psi \notin \Sigma$, então $\Sigma \cup \{\psi\}$ é inconsistente.

Resolução de exercícios selecionados (*)

Resolução 4.a

Para a primeira fórmula é possível construir uma dedução:

1		$\forall x(\phi \to \psi)$	
2		$\forall x \phi$	
3	u	$\phi[u/x]$	$\forall$E, 2
4		$(\phi \to \psi)[u/x]$	$\forall$E, 1
5		$\phi[u/x] \to \psi[u/x]$	R, 4
6		$\psi[u/x]$	$\to$E, 3, 5
7		$\forall x \psi$	$\forall$I, 3–6
8		$\forall x \phi \to \forall x \psi$	$\to$I, 2–7

A segunda não é válida pelo que basta indicar um exemplo. Seja a linguagem $\mathcal{L}$ com o alfabeto $\mathcal{R}_1 = \{R, S\}$ e $\psi = R(x)$ e $\phi = S(x)$.

Seja a estrutura $\mathcal{A}$ onde $A = \mathbb{N}$ e $R^A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$ e $S^A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é ímpar}\}$. Então podemos concluir que $\mathcal{A} \not\models (\forall x R(x) \to \forall x S(x)) \to \forall x(R(x) \to S(x))$. Nota que $\mathcal{A} \not\models (\forall x R(x)$, $\mathcal{A} \not\models \forall x S(x))$ e $\mathcal{A} \not\models \forall x(R(x) \to S(x))$ pelo que na implicação principal o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

<table>
<tr><th></th><th>Introdução</th><th>Eliminação</th></tr>
<tr><td>$\wedge$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \phi & \\ \vdots & \\ \psi & \\ \vdots & \\ \phi \wedge \psi & \wedge\mathrm{I} \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \phi \wedge \psi & \\ \vdots & \\ \phi & \wedge\mathrm{E} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \phi \wedge \psi & \\ \vdots & \\ \psi & \wedge\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\vee$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \phi & \\ \vdots & \\ \phi \vee \psi & \vee\mathrm{I} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \phi & \\ \vdots & \\ \psi \vee \phi & \vee\mathrm{I} \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \phi \vee \psi & \\ \vdots & \\ \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} & \\ \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} & \\ \gamma & \vee\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\neg$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \mathbf{F} \end{array} & \\ \neg\phi & \neg\mathrm{I} \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \neg\neg\phi & \\ \vdots & \\ \phi & \neg\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{F}$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \phi & \\ \vdots & \\ \neg\phi & \\ \vdots & \\ \mathbf{F} & \mathbf{F\ I} \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \mathbf{F} & \\ \vdots & \\ \phi & \mathbf{F\ E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\rightarrow$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \begin{array}{|l} \phi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} & \\ \phi \rightarrow \psi & \rightarrow\mathrm{I} \end{array}$</td>
<td>$\begin{array}{|ll} \phi & \\ \vdots & \\ \phi \rightarrow \psi & \\ \vdots & \\ \psi & \rightarrow\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
</table>

Lógica Computacional (CC2003)- Folha de trabalho n. 4

	Introdução	Eliminação
$=$	$\dfrac{}{t=t}$ $=\mathbf{I}$	$t_1 = t_2$ $\vdots$ $\phi[t_1/x]$ $\vdots$ $\phi[t_2/x]$ $=\mathbf{E}$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em ϕ
$\forall$	v $\vdots$ $\vdots$ $\phi[v/x]$ $\forall x\ \phi$ $\forall\mathbf{I}$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\forall x\ \phi$ $\vdots$ $\phi[t/x]$ $\forall\mathbf{E}$ onde x é substituível por t em ϕ
$\exists$	$\phi[t/x]$ $\vdots$ $\vdots$ $\exists x\ \phi$ $\exists\mathbf{I}$ onde x é substituível por t em ϕ	$\exists x\ \phi$ v $\phi[v/x]$ $\vdots$ ψ ψ $\exists\mathbf{E}$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ