I. Para cada uma das afirmações seguintes indica se é verdadeira ou falsa, justificando.

1. A fórmula $(q \lor \neg q) \to (q \land \neg s)$ é uma tautologia.
2. $p \to r, r \models \neg p$.
3. $\{\exists y \forall x \neg Q(x, y), \forall x Q(x, x)\}$ é um conjunto de fórmulas de lógica de primeira ordem satisfazível.
4. Se Σ é conjunto de fórmulas satisfazível então existe uma fórmula ϕ tal que $\Sigma \not\models \phi$.
5. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de lógica de 1ª ordem com alfabeto $\mathcal{F}_1 = \{f\}$, $\mathcal{R}_1 = \{P\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{Q\}$. Seja $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ uma estrutura tal que $A = \{1, 2, 3\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{1, 2\}$, $Q^{\mathcal{A}} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ e $f^{\mathcal{A}}(1) = 2$, $f^{\mathcal{A}}(2) = 2$, $f^{\mathcal{A}}(3) = 3$. A fórmula $\forall x \exists y (Q(f(x), y) \to P(y))$ é satisfazível em $\mathcal{A}$?
6. $\forall x(\phi \lor \psi) \models \forall x \phi \lor \forall x \psi$ é válida.

II.

7. Calcula uma fórmula em forma normal conjuntiva equivalente é $\neg(p \to (\neg(r \land (p \to r))))$?
8. Usando o sistema dedutivo DN mostra que $\neg\phi \lor (\psi \to \theta) \vdash \phi \to (\neg\psi \lor \theta)$. Anota todos os passos com as regras que usares.
9. Sejam Γ, Σ conjuntos de fórmulas e ϕ, ψ fórmulas da lógica de primeira ordem. Mostra que se $\Gamma \vdash \forall x \phi$ e $\Sigma \vdash \exists y \psi$, então $\Gamma, \Sigma \vdash \exists y(\phi \land \psi)$.
10. Sendo A um conjunto e $M, N \subseteq A \times A$ duas relações binárias, a relação *composição* MN é tal que para todos os $a, b \in A$, $(a, b) \in MN$ se existe $a' \in A$ tal que $(a, a') \in M$ e $(a', b) \in N$. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de primeira ordem com igualdade e $\mathcal{R}_2 = \{R, Q, P\}$.
    (a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ é um modelo de ψ se e só se a relação $P^{\mathcal{A}}$ é a composição de $Q^{\mathcal{A}}$ e de $R^{\mathcal{A}}$ (isto é $Q^{\mathcal{A}} R^{\mathcal{A}}$).
    (b) Indica, **justificando** duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$, tal que $\mathcal{A}_1 \models \psi$ e $\mathcal{A}_2 \not\models \psi$
11. Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se esta é ou não é um teorema da lógica de primeira ordem, quaisquer que sejam as fórmulas ϕ e ψ. No caso afirmativo, indica uma dedução natural da respectiva fórmula. Caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ϕ e ψ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ que não seja seu modelo.
    (a) $\exists x \neg(\phi \lor \psi) \to \exists x(\neg\phi \lor \neg\psi)$.
    (b) $(\exists x \phi \to \forall x \psi) \to \forall x(\phi \to \psi)$.
12. Seja ψ uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ para a qual existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tais que $\mathcal{A} \models_s \psi$ para toda a interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \not\models_t \psi$ para toda a interpretação t das variáveis em $\mathcal{B}$. Justifica a validade ou falsidade **cada** uma das afirmações seguintes: ψ é uma proposição; ψ não é uma fórmula válida; $\neg\psi$ não é uma fórmula válida.
13. Considerando a linguagem de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números obtém uma dedução natural para $\forall x\, x = x \times 1$.
14. Converte a proposição seguinte para forma clausal, começando por transformar em forma normal prenexa: $\neg(\forall x Q(x) \lor \neg\forall x(\exists z R(z, x) \to \neg\forall y R(y, x)))$.

	Introdução	**Eliminação**
$\land$	$\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi\land\psi}\land\mathbf{I}$	$\dfrac{\phi\land\psi}{\phi}\land\mathbf{E}_1 \qquad \dfrac{\phi\land\psi}{\psi}\land\mathbf{E}_2$
$\lor$	$\dfrac{\phi}{\phi\lor\psi}\lor\mathbf{I}_1 \qquad \dfrac{\psi}{\phi\lor\psi}\lor\mathbf{I}_2$	$\dfrac{\phi\lor\psi \qquad \begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\lor\mathbf{E}$
$\neg$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ F\end{array}}{\neg\phi}\neg\mathbf{I}$	$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\neg\mathbf{E}$
F	$\dfrac{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \neg\phi\end{array}}{F}F\mathbf{I}(*)$	$\dfrac{F}{\phi}F\mathbf{E}$
$\rightarrow$	$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\phi\rightarrow\psi}\rightarrow\mathbf{I}$	$\dfrac{\phi \quad \phi\rightarrow\psi}{\psi}\rightarrow\mathbf{E}$
$=$	$\dfrac{}{t=t}=\mathbf{I}$	$\dfrac{t_1=t_2 \quad \phi[t_1/x]}{\phi[t_2/x]}=\mathbf{E}$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em ϕ
$\forall$	$\dfrac{\begin{array}{c}[v]\\ \vdots\\ \phi[v/x]\end{array}}{\forall x\ \phi}\forall\mathbf{I}$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\dfrac{\forall x\ \phi}{\phi[t/x]}\ \forall\mathbf{E}$ onde x é substituível por t em ϕ
$\exists$	$\dfrac{\phi[t/x]}{\exists x\ \phi}\ \exists\mathbf{I}$ onde x é substituível por t em ϕ	$\dfrac{\exists x\ \phi \qquad \begin{array}{c}[v \quad \phi[v/x]]\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\psi}\ \exists\mathbf{E}$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Algumas regras derivadas NOTA: Podes usar mas deves demonstrá-las à parte.

$$\dfrac{\phi\rightarrow\psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}\mathbf{MT} \qquad \dfrac{\phi}{\neg\neg\phi}\neg\neg\mathbf{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\phi]\\ \vdots\\ F\end{array}}{\phi}\mathbf{RA} \qquad \dfrac{}{\phi\lor\neg\phi}\mathbf{TE}$$

1. $\forall x(x+1\neq 0)$
2. $\forall x\forall y(x+1=y+1\rightarrow x=y)$
3. $0+1=1$
4. $\forall x\ x+0=x$
5. $\forall x\forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$
6. $\forall x\ x\times 0=0$
7. $\forall x\forall y\ x\times(y+1)=(x\times y)+x$
8. (princípio da indução) $(Q(0)\land\forall x(Q(x)\rightarrow Q(x+1)))\rightarrow\forall xQ(x)$