Nome: ______________________________ Número: __________

I. Para cada uma das afirmações seguintes indica se é verdadeira ou falsa, **justificando** cuidadosamente.

1. As seguintes fórmulas são equivalentes: $r \vee \neg q \vee (q \wedge s)$ e $(q \to \neg s) \to (q \to r)$
2. A fórmula $(q \wedge \neg s) \to (q \vee \neg q)$ é uma tautologia.
3. $\vdash (p \to (q \wedge r)) \to (p \to q)$.
4. $\{\forall y \exists x Q(x,y), \forall x \neg Q(x,x)\}$ é um conjunto de fórmulas de lógica de primeira ordem não satisfazível.
5. Sejam Σ e Γ conjuntos de fórmulas proposicionais e φ uma fórmula. Se $\Sigma \cup \Gamma \vdash \varphi$ então $\Sigma \vdash \varphi$ ou $\Gamma \vdash \varphi$.
6. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de lógica de 1ª ordem com alfabeto $\mathcal{R}_2 = \{Q\}$. Seja $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ tal que $A = \{1,2,3,4\}$ e $Q^{\mathcal{A}} = \{(1,3),(2,4)\}$. A fórmula $\forall x \exists y (Q(x,y) \vee Q(y,x))$ é satisfeita em $\mathcal{A}$.
7. $(\exists x \varphi \to \exists x \psi) \models \exists x(\varphi \to \psi)$ qualquer que sejam φ, ψ fórmulas da lógica de primeira ordem.
8. Sejam φ e ψ duas fórmulas da lógica de primeira ordem de uma linguagem $\mathcal{L}$. Se existirem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \not\models \varphi$ e $\mathcal{B} \models \psi$, então $\not\models \varphi \vee \psi$.

II.

9. Usando o sistema dedutivo de dedução natural mostra que $(\varphi \vee \psi) \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Anota todos os passos com as regras que usares.
10. Um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ é não dirigido se $E \subseteq V \times V$ é uma relação simétrica. Num grafo $\mathcal{G}$ um conjunto $I \subseteq V$ diz-se *independente* se para qualquer par de vértices $v_1, v_2 \in I$ não existe nenhuma aresta entre v_1 e v_2. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de lógica de 1ª ordem com igualdade com $\mathcal{R}_1 = \{P\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{Q\}$.
    (a) Define uma proposição ψ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{G} = (V, (Q^{\mathcal{G}}, P^{\mathcal{G}}))$ é um modelo de ψ se e só se $(V, Q^{\mathcal{G}})$ for um grafo não dirigido e $P^{\mathcal{G}}$ um conjunto independente em $\mathcal{G}$.
    (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, tal que $\mathcal{G}_1 \models \psi$ e $\mathcal{G}_2 \not\models \psi$
11. Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se esta é ou não é um teorema da lógica de primeira ordem, quaisquer que sejam as fórmulas φ e ψ. No caso afirmativo, indica uma dedução natural da respectiva fórmula. Caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas φ e ψ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ que não seja seu modelo.
    (a) $\forall y(\neg\varphi \vee \psi) \to (\exists y \varphi \to (\neg(\forall y \neg\psi)))$.
    (b) $(\exists x \neg\varphi \vee \exists x \psi) \to \forall x(\varphi \vee \psi)$.
12. Considera a linguagem de lógica de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números. obtém uma dedução natural para $\forall x\ (x + 0 = 0 + x)$.
13. Converte a proposição seguinte para forma clausal, começando por transformar em forma normal prenexa:
    $\exists y \neg P(y) \to (\neg(\forall y (Q(f(y)) \vee Q(y))))$.

	Introdução	**Eliminação**
$\land$	$\begin{array}{\|ll} \varphi & \\ \vdots & \\ \psi & \\ \vdots & \\ \varphi \land \psi & \land\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \varphi \land \psi & \\ \vdots & \\ \varphi & \land\mathrm{E} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \varphi \land \psi & \\ \vdots & \\ \psi & \land\mathrm{E} \end{array}$
$\lor$	$\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \varphi & \\ \vdots & \\ \varphi \lor \psi & \lor\mathrm{I} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \varphi & \\ \vdots & \\ \psi \lor \varphi & \lor\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \varphi \lor \psi & \\ \vdots & \\ \quad\begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} & \\ \quad\begin{array}{\|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} & \\ \gamma & \lor\mathrm{E} \end{array}$
$\neg$	$\begin{array}{\|ll} \quad\begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \mathbf{F} \end{array} & \\ \neg\varphi & \neg\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \neg\neg\varphi & \\ \vdots & \\ \varphi & \neg\mathrm{E} \end{array}$
F	$\begin{array}{\|ll} \varphi & \\ \vdots & \\ \neg\varphi & \\ \vdots & \\ \mathbf{F} & \mathbf{FI} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \vdots & \\ \mathbf{F} & \\ \vdots & \\ \varphi & \mathbf{FE} \end{array}$
$\to$	$\begin{array}{\|ll} \quad\begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} & \\ \varphi \to \psi & \to\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|ll} \varphi & \\ \vdots & \\ \varphi \to \psi & \\ \vdots & \\ \psi & \to\mathrm{E} \end{array}$

	Introdução	**Eliminação**
$=$	$\vdots$ $t = t$ $\quad$ **=I**	$t_1 = t_2$ $\vdots$ $\varphi[t_1/x]$ $\vdots$ $\varphi[t_2/x]$ $\quad$ **=E** $\quad$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em φ
$\forall$	v $\vdots$ $\quad\varphi[v/x]$ $\forall x\ \varphi$ $\quad$ **∀I** $\quad$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\forall x\ \varphi$ $\vdots$ $\varphi[t/x]$ $\quad$ **∀E** $\quad$ onde x é substituível por t em φ
$\exists$	$\varphi[t/x]$ $\vdots$ $\exists x\ \varphi$ $\quad$ **∃I** $\quad$ onde x é substituível por t em φ	$\exists x\ \varphi$ v $\quad\varphi[v/x]$ $\quad\vdots$ $\quad\psi$ ψ $\quad$ **∃E** $\quad$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Algumas regras derivadas NOTA: Podes usar mas deves demonstrá-las à parte.

$$\frac{\varphi\to\psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}\,\mathbf{MT} \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\,\neg\neg\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ F\end{array}}{\varphi}\,\mathbf{RA} \qquad \frac{}{\varphi\vee\neg\varphi}\,\mathbf{TE}$$

Axiomas de Peano

1. $\forall x(x + 1 \neq 0)$
2. $\forall x \forall y(x + 1 = y + 1 \to x = y)$
3. $0 + 1 = 1$
4. $\forall x\ x + 0 = x$
5. $\forall x \forall y\ x + (y + 1) = (x + y) + 1$
6. $\forall x\ x \times 0 = 0$
7. $\forall x \forall y\ x \times (y + 1) = (x \times y) + x$
8. (princípio da indução) $(Q(0) \wedge \forall x(Q(x) \to Q(x + 1))) \to \forall x Q(x)$