Nome: ______________________________ Número: ________

I. Para cada uma das afirmações seguintes indica se é verdadeira ou falsa, **justificando** cuidadosamente.

1. A fórmula $(s \vee \neg s) \to (\neg r \vee \neg s)$ é uma tautologia.
2. $\{(p \wedge s) \to r, \neg r\} \models \neg p$.
3. $(r \to s) \vdash \neg(r \wedge \neg s)$.
4. $\{\exists u(V(u) \vee S(u)), \forall u(\neg S(u) \vee \neg V(u))\}$ é um conjunto de fórmulas de lógica de primeira ordem satisfazível.
5. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de lógica de 1ª ordem com igualdade e alfabeto $\mathcal{R}_2 = \{V\}$. Seja $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ tal que $A = \{1, 2, 3\}$ e $V^{\mathcal{A}} = \{(3, 3), (2, 1), (2, 2\}$. A fórmula seguinte é satisfeita em $\mathcal{A}$: $\forall u \forall v(V(u, u) \to (\neg V(u, v) \vee u = v))$.
6. $\models \forall u \exists v \psi \to \exists u \forall v \psi$, qualquer que seja ψ fórmula da lógica de primeira ordem.
7. Seja ψ uma proposição duma linguagem de lógica de 1ª ordem $\mathcal{L}$. Tem-se que $\models \psi$ se e só se existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \neg\psi$ e $\mathcal{B} \not\models \neg\psi$.

II.

8. Usando o sistema dedutivo de dedução natural mostra que $\vdash (\psi \to \varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \varphi)$. Anota todos os passos com as regras que usares.
9. Seja Σ um conjunto de fórmulas da lógica de primeira ordem satisfazível. Mostra que para qualquer fórmula φ temos que $\Sigma \cup \{\varphi\}$ ou $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ é satisfazível.
10. Um grafo $\mathcal{G} = (V, E)$ é não dirigido se $E \subseteq V \times V$ é uma relação simétrica. Num grafo $\mathcal{G}$ um conjunto $C \subseteq V$ diz-se um *clique* se para qualquer par de vértices $v_1, v_2 \in C$ existe uma aresta entre v_1 e v_2. Seja $\mathcal{L}$ uma linguagem de lógica de 1ª ordem com igualdade com $\mathcal{R}_1 = \{S\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{V\}$.
    (a) Define uma proposição φ de $\mathcal{L}$ tal que uma estrutura $\mathcal{G} = (V, (V^{\mathcal{G}}, S^{\mathcal{G}}))$ é um modelo de φ se e só se $(V, V^{\mathcal{G}})$ for um grafo não dirigido e $S^{\mathcal{G}}$ um clique em $\mathcal{G}$.
    (b) Indica, **justificando**, duas estruturas de $\mathcal{L}$, $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, tal que $\mathcal{G}_1 \models \varphi$ e $\mathcal{G}_2 \not\models \varphi$.
11. Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se esta é ou não é um teorema da lógica de primeira ordem, quaisquer que sejam as fórmulas ψ e φ. No caso afirmativo, indica uma dedução natural da respectiva fórmula. Caso contrário, indica uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ψ e φ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ que não seja seu modelo.
    (a) $(\forall u\varphi \to \exists u\psi) \to \forall u(\varphi \to \psi)$.
    (b) $\exists v(\neg\varphi \vee \psi) \to (\forall v\varphi \to \exists v\psi)$.
12. Considera a linguagem de lógica de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números. Obtém uma dedução natural para $\forall u\ (u \times 0 = 0 \times u)$.

	Introdução	Eliminação
$\land$	$\begin{array}{\|l} \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \vdots \\ \varphi \land \psi \qquad \land\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \vdots \\ \varphi \land \psi \\ \vdots \\ \varphi \qquad \land\mathrm{E} \end{array} \qquad \begin{array}{\|l} \vdots \\ \varphi \land \psi \\ \vdots \\ \psi \qquad \land\mathrm{E} \end{array}$
$\lor$	$\begin{array}{\|l} \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ \varphi \lor \psi \qquad \lor\mathrm{I} \end{array} \qquad \begin{array}{\|l} \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ \psi \lor \varphi \qquad \lor\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \varphi \lor \psi \\ \vdots \\ \begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} \\ \begin{array}{\|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} \\ \gamma \qquad \lor\mathrm{E} \end{array}$
$\neg$	$\begin{array}{\|l} \begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \mathbf{F} \end{array} \\ \neg\varphi \qquad \neg\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \vdots \\ \neg\neg\varphi \\ \vdots \\ \varphi \qquad \neg\mathrm{E} \end{array}$
F	$\begin{array}{\|l} \varphi \\ \vdots \\ \neg\varphi \\ \vdots \\ \mathbf{F} \quad \mathbf{FI} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \vdots \\ \mathbf{F} \\ \vdots \\ \varphi \quad \mathbf{FE} \end{array}$
$\to$	$\begin{array}{\|l} \begin{array}{\|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} \\ \varphi \to \psi \qquad \to\mathrm{I} \end{array}$	$\begin{array}{\|l} \varphi \\ \vdots \\ \varphi \to \psi \\ \vdots \\ \psi \qquad \to\mathrm{E} \end{array}$

	Introdução		**Eliminação**	
$=$	$\vdots$ $t = t$ $=$**I**		$t_1 = t_2$ $\vdots$ $\varphi[t_1/x]$ $\vdots$ $\varphi[t_2/x]$ $=$**E**	e x é substituível por t_1 e por t_2 em φ
$\forall$	v $\vdots$ $\varphi[v/x]$ $\forall x\ \varphi$ $\forall$**I**	onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\forall x\ \varphi$ $\vdots$ $\varphi[t/x]$ $\forall$**E**	onde x é substituível por t em φ
$\exists$	$\varphi[t/x]$ $\vdots$ $\exists x\ \varphi$ $\exists$**I**	onde x é substituível por t em φ	$\exists x\ \varphi$ v $\varphi[v/x]$ $\vdots$ ψ ψ $\exists$**E**	onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Algumas regras derivadas NOTA: Podes usar mas deves demonstrá-las à parte.

$$\frac{\varphi\to\psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}\,\mathbf{MT} \qquad \frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\,\neg\neg\mathbf{I} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ F\end{array}}{\varphi}\,\mathbf{RA} \qquad \frac{}{\varphi\vee\neg\varphi}\,\mathbf{TE}$$

Axiomas de Peano

1. $\forall x (x + 1 \neq 0)$
2. $\forall x \forall y (x + 1 = y + 1 \to x = y)$
3. $0 + 1 = 1$
4. $\forall x\ x + 0 = x$
5. $\forall x \forall y\ x + (y + 1) = (x + y) + 1$
6. $\forall x\ x \times 0 = 0$
7. $\forall x \forall y\ x \times (y + 1) = (x \times y) + x$
8. (princípio da indução) $(Q(0) \wedge \forall x (Q(x) \to Q(x + 1))) \to \forall x Q(x)$