# Lógica Computacional
# CC2003
# Folha de trabalho n. 1

## Lógica Proposicional: semântica

**1** Considerando as convenções de prioridades das operações lógicas dadas no curso($\neg < \wedge < \vee < \rightarrow$ e $\rightarrow$ associativa à direita), para cada uma das fórmulas seguintes desenha a sua árvore sintáctica (abstracta) e indica quais as suas subfórmulas:

(a) $p \wedge \neg q \rightarrow \neg p$;

(b) $p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$;

(c) $\neg(s \rightarrow (\neg(p \rightarrow (q \vee \neg s))))$;

(d) $p \rightarrow (\neg q \vee (q \rightarrow p))$;

(e) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)))$.

**2** Sendo $v(p) = \mathbf{V}$ e $v(q) = \mathbf{F}$ determina se $\models_v \phi$ sendo $\phi$ cada uma das seguintes fórmulas:

(a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$;

(b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$;

(c) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$;

(d) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee q))$;

(e) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$;

**3** Mostra a equivalência semântica das propriedades das operações lógicas dadas no curso:

(a) comutatividade e associatividade de $\wedge$ e $\vee$;

(b) Leis de DeMorgan;

(c) distributividade de $\wedge$ em relação a $\vee$ (e vice-versa);

(d) idempotências de $\wedge$ e $\vee$;

(e) dupla negação.

**4** Quais das seguintes fórmulas é semanticamente equivalente a $p \rightarrow (q \vee r)$?

(a) $q \vee (\neg p \vee r)$

(b) $(q \wedge \neg r) \rightarrow p$

(c) $(p \wedge \neg r) \rightarrow q$

(d) $(\neg q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$

**5** Das fórmulas seguintes indica, **justificando**, se são tautologias, satisfazíveis ou contradições. Começa por simplificar as fórmulas usando equivalências semânticas.

(a) $(p \rightarrow (q \vee r)) \vee (r \rightarrow \neg p)$;

(b) $p \rightarrow (q \rightarrow \neg(\neg q \rightarrow \neg p))$;

(c) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$;

(d) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \vee q))$;

(e) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg(p \rightarrow s) \rightarrow \neg(q \rightarrow s))$;

(f) $(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$;

(g) $(p \vee q) \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$;

(h) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$;

(i) $(p \rightarrow s) \rightarrow (((p \rightarrow (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow s)))$;

(j) $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$;

(k) $(p \rightarrow q) \wedge \neg((q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s))$;

(l) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg r \rightarrow (q \vee (\neg p \wedge r)))$;

(m) $((p \vee q) \rightarrow (s \wedge t)) \rightarrow ((p \rightarrow s) \wedge (q \rightarrow t))$.

(n) $(p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

(o) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (\neg(p \leftrightarrow r))$

**6** [1] Numa ilha alguns dos seus habitantes, chamados "cavaleiros", dizem sempre a verdade, e outros chamados "vagabundos" mentem sempre. Assumimos que um qualquer habitante desta ilha cai numa ou na outra classe.

(a) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. **A** faz a seguinte afirmação: "Pelo menos um de nós é um vagabundo."

O que são **A** e **B**?

(b) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. Suponhamos que A diz: "Eu sou um vagabundo ou B é um cavaleiro." O que são **A** e **B**?

(c) Dois habitantes, **A** e **B** estão num jardim. Suponhamos que **A** diz: "Eu sou um vagabundo, ou dois mais dois é igual a cinco." O que podemos concluir?

(d) Dois habitantes da ilha, **A** e **B** estavam juntos num jardim. Suponhamos que **A** diz: "Eu sou um vagabundo, mas **B** não."

O que são **A** e **B**?

(e) Três habitantes, **A**, **B** e **C** juntam-se. **A** e **B** fazem as seguintes afirmações:

**A:** Todos nós somos vagabundos.

**B:** Exactamente um de nós é um cavaleiro.

O que são **A**, **B** e **C**?

(f) Suponhamos que no problema anterior, **A** e **B** dizem o seguinte:

**A:** Nós somos todos vagabundos.

**B:** Exactamente um de nós é um vagabundo.

Podemos determinar o que é **B**? Podemos determinar o que é **C**?

(g) Temos três personagens, **A**, **B** e **C** (cavaleiros ou vagabundos). **A** diz: "**B** e **C** são do mesmo tipo". Alguém pergunta então a **C**: "**A** e **B** são do mesmo tipo?"

O que é que respondeu **C**?

(h) Mais uma vez deparamo-nos com três habitantes, **A**, **B** e **C**. Dois deles são do mesmo tipo (cavaleiros ou vagabundos). **A** e **B** fazem as seguintes afirmações:

**A:** **B** é um vagabundo.

**B:** **A** e **C** são do mesmo tipo.

O que é **C**?

(i) Três dos habitantes da ilha, **A**, **B** e **C**, estavam juntos num jardim. Um estrangeiro que por ali passava perguntou a **A**, "Tu és um cavaleiro ou um vagabundo?" **A** respondeu, mas de tal forma que o estrangeiro não conseguiu entender a resposta. Perguntou então, o estrangeiro, a **B**, "O que foi que **A** respondeu?" **B** responde: "**A** disse que era um vagabundo." Nessa altura **C** exclama: "Não acredites em **B**, ele está a mentir!" O que são **B** e **C**?

(j) Nessa ilha existe uma existe uma bifurcação duma estrada, conduzindo um dos caminhos à cidade mais próxima. Se um estrangeiro quiser saber qual é esse caminho, qual deve ser a pergunta que deve fazer a um habitante que esteja na bifurcação, de tal modo que ele possa responder com um simples "sim" ou "não". **Sugestão:** A pergunta deve relacionar (por equivalência) o que se pretende saber com a determinação da classe do habitante.

(k) **Uma minha aventura** Este é um problema invulgar, e além disso é inspirado num caso real. Uma vez quando na ilha dos cavaleiros e dos vagabundos, encontrei dois habitantes que descansavam debaixo de uma árvore. Aproximei-me e perguntei a um deles: "Algum de vocês é um cavaleiro?". Ele respondeu, e com isso eu fiquei a saber a resposta à minha pergunta.

A pessoa que interpelei era um cavaleiro ou um vagabundo? E o outro? Posso garantir que dei a informação necessária para resolver o problema.

[1] Extraído de *What is the name of this book?*, R. Smullyan (tradução Rogério Reis).

(l) Suponhamos que visitavas a ilha dos cavaleiros e vagabundos e encontrava dois dos seus habitantes a descansar, preguiçosamente, ao sol. Perguntas a um deles se o outro é um cavaleiro e recebes a resposta (sim ou não). Nessa altura perguntas ao outro se o primeiro é um cavaleiro e recebes a respectiva resposta (sim ou não).

As duas respostas são necessariamente iguais?

**7** [Cavaleiros, Vagabundos e Normais.] Um tipo igualmente fascinante de problemas trata de três tipos de pessoas: cavaleiros, que dizem sempre verdade; vagabundos, que dizem sempre mentira; e normais, que por vezes mentem, por vezes dizem a verdade.

(a) Dadas três pessoas, **A**, **B** e **C**, uma das quais é um cavaleiro, outra um vagabundo e outra um normal (não necessariamente nesta ordem). Fazem as seguintes declarações:

**A:** Eu sou normal.

**B:** Isso é verdade!

**C:** Eu não sou normal.

O que são **A**, **B** e **C**?

(b) Eis um invulgar! Duas pessoas, **A** e **B** (qualquer uma das quais pode ser cavaleiro, vagabundo ou normal), fazem as seguintes declarações:

**A:** **B** é um cavaleiro.

**B:** **A** não é um cavaleiro.

Prova que pelo menos um deles diz a verdade, mas não é um cavaleiro.

(c) Desta vez **A** e **B** dizem o seguinte:

**A:** **B** é um cavaleiro.

**B:** **A** é um vagabundo.

Prova que um deles diz a verdade mas não é um cavaleiro, ou um deles mente mas não é um vagabundo.

**8** Três indivíduos, A, B, e C, suspeitos de um crime, fazem os seguintes depoimentos, respectivamente:

A: B é culpado, mas C é inocente;

B: Se A é culpado, então C é culpado;

C: Eu estou inocente, mas um dos outros dois é culpado.

(a) Os três depoimentos são compatíveis?

(b) Algum dos depoimentos é consequência dos outros dois?

(c) Supondo os três réus inocentes, quem mentiu?

(d) Supondo que todos disseram a verdade, quem é inocente e quem é culpado?

(e) Supondo que os inocentes disseram a verdade e os culpados mentiram, quem é inocente e quem é culpado?

**9** A proposição "Smith foi o assassino" é ou não uma consequência das proposições "se Jones não encontrou Smith na noite passada, então Smith foi o assassino ou Jones mente", "se Smith não foi o assassino, então Jones não encontrou Smith na noite passada e o assassinio sucedeu depois da meia noite" e "se o assassinio sucedeu depois da meia noite, então Smith foi o assassino ou Jones mente".

**10** Será possível cumprir simultaneamente todas as instruções seguintes?

– se caminhar em silêncio então não tenha um revólver carregado, ou use óculos escuros;

– se tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio ou não use óculos escuros;

– se usar óculos escuros ou tiver um revólver carregado, então caminhe em silêncio.

– caminhe em silêncio ou tenha um revólver carregado, e se tiver um revólver carregado então não caminhe em silêncio;

# Lógica Computacional
# CC2003
# Folha de trabalho n. 1

**11** Imagina as seguintes regras para escolher disciplinas de opção para o próximo ano lectivo:

R1: Se se escolher *Computação Gráfica*, então escolha também *Programação Numérica* ou *Álgebra*.

R2: Escolher *Álgebra* se e só se escolher *Computação Gráfica* ou *Programação Numérica*.

R3: Não se pode escolher as três, mas tem que se escolher pelo menos uma das três disciplinas.

R4: Se não se escolher *Álgebra*, então escolher as outras duas.

1. É possível satisfazer este conjunto de regras?
2. Será que a regra R4 é realmente necessária? E a regra R1?
3. Indica uma regra simples, mas equivalente a este conjunto (confuso) de quatro regras.

**12** Justifica a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes onde $p, q, r$ e $s$ são variáveis proposicionais. Nota: sem construir a tabela de verdade.

(a) $\models (p \to (((q \to p) \to p) \to r)$.

(b) $\models (p \to (q \to s)) \to (q \to (p \to s))$.

(c) $\models (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(d) $\models ((p \wedge q) \to (s \vee t)) \to ((p \to s) \vee (q \to t))$.

(e) $\models (p \wedge \neg p) \to (p \wedge \neg r)$.

(f) $\models (q \vee \neg r) \to (q \wedge \neg q)$

(g) $\{(p \to q) \vee r, ((p \to q) \vee r) \to \neg r, (p \to q) \to (q \to r)\} \models \neg q$.

(h) $\{(p \vee q) \to r)\} \models (p \to r) \vee (q \to r)$.

(i) $\{p \vee \neg q, \neg r \to \neg\neg q, r \to \neg s, \neg\neg s\} \models p$.

(j) $\{\neg(q \wedge r), q\} \models \neg r$.

(k) $\{\neg q \to r, q\} \models \neg r$.

(l) $\{\neg p \vee \neg q \vee r, q \vee r, p\} \models r$.

(m) $\{(p \wedge q) \to r, \neg r\} \models p \vee q$.

(n) $\{(p \wedge q) \to r, r\} \models \neg p$.

(o) $\{p, \neg p \to q, q \to \neg p\} \models \neg q$.

(p) $\{p \wedge q\} \models (p \to \neg q) \wedge (\neg q \to p)$.

**13** Justifica a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, onde $\Gamma$ e $\Sigma$ representam conjuntos de fórmulas e $\phi, \psi, \theta, \gamma$ representam fórmulas da lógica proposicional. Caso a afirmação seja falsa deves dar um contra-exemplo indicando valores particulares dos conjuntos ou das fórmulas para as quais a afirmação é falsa. Caso a afirmação seja verdade deves justificar usando as definições.

(a) $\models (\theta \vee \phi) \to (\neg\theta \to \phi)$.

(b) $\{\phi \to \psi, \psi \to \phi\} \models (\phi \vee \psi) \to (\phi \wedge \psi)$.

(c) $\{\psi \to \phi, \gamma \to \theta\} \models \psi \vee \gamma \to \phi \wedge \theta$.

(d) $\{\psi \to (\neg\phi \vee \gamma), \neg\gamma\} \models \neg\phi \to \neg\psi$.

(e) Se $\phi, \psi \models \theta \to \gamma$ e $\phi \models \theta$ então $\phi, \psi \models \gamma$.

(f) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$, então $\Sigma \models \theta$.

(g) Se $\Sigma \models \theta$ e $\Gamma \subseteq \Sigma$, então $\Gamma \models \theta$.

(h) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Sigma \models \theta$, então $\Gamma \cap \Sigma \models \theta$.

(i) Se $\Gamma \models \theta$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$ então $\Sigma \cap \Gamma \models \theta$.

(j) Se $\Sigma \models \theta$ então $\Sigma \cap \Gamma \models \theta$.

(k) Se $\Sigma \models \theta$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$ então $\Sigma \cup \Gamma \models \theta$.

(l) Se $\Gamma \cup \{\phi\}$ é satisfazível então $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ não é satisfazível.

(m) $\phi \models \psi \to \theta$ e $\gamma \models \psi$ se e só se $\phi, \gamma \models \theta$.

(n) Se $\Sigma$ é um conjunto de fórmulas satisfazível então para toda a fórmula $\phi$, $\Sigma \cup \{\phi\}$ é satisfazível ou $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ é satisfazível.

(o) Se $\Sigma \models \phi$ e $\Gamma \models \phi$ então $\Sigma \cup \Gamma \models \phi$.

(p) Se $\Sigma$ é satisfazível então existe uma fórmula $\phi$ tal que $\Sigma \not\models \phi$.

**14** Mostra que cada um dos seguintes conjuntos de conectivas são completos:

(a) $\{\tilde{\vee}, \mathbf{V}\}$;

(b) $\{\tilde{\wedge}, \mathbf{F}\}$;

(c) $\{\neg, \wedge\}$.

**15** Constrói uma fórmula em forma normal disjuntiva e uma em forma normal conjuntiva , cujas funções de verdade são dadas pelas seguintes tabelas:

(a)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **F** |
| **V** | **V** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **V** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** | **F** |

(b)

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** |
| **V** | **V** | **F** | **F** |
| **V** | **F** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **F** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **F** | **F** | **F** |

**16** Para cada uma das funções de verdade *(a)*, *(b)* e *(c)* seguintes, constrói uma fórmula em forma normal disjuntiva e uma fórmula em forma normal conjuntiva:

| $p$ | $q$ | $r$ | $(a)$ | $(b)$ | $(c)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** |
| **V** | **V** | **F** | **V** | **V** | **F** |
| **V** | **F** | **V** | **V** | **F** | **V** |
| **V** | **F** | **F** | **V** | **V** | **F** |
| **F** | **V** | **V** | **F** | **V** | **V** |
| **F** | **V** | **F** | **V** | **V** | **F** |
| **F** | **F** | **V** | **V** | **F** | **V** |
| **F** | **F** | **F** | **V** | **F** | **F** |

**17** Para cada uma das seguintes fórmulas determina, por equivalências semânticas e indicando todos o passos, uma fórmula equivalente em forma normal disjuntiva e outra em forma normal conjuntiva. Escreve as fórmulas em forma conjuntiva como um conjunto de cláusulas e cada cláusula como um conjunto de literais.

(a) $\neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg p \to q))))$;

(b) $p \to (\neg q \to \neg(p \to q))$;

(c) $\neg(p \to (\neg(q \wedge (\neg p \to q))))$;

(d) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$;

(e) $((p \to q) \to p) \to p$;

(f) $p \to \neg(q \to \neg(p \to q))$;

(g) $(p \to q) \wedge (\neg r \to (q \vee (\neg p \wedge r)))$;

(h) $(p \to q) \wedge (\neg q \to (p \vee \neg q))$;

(i) $p \to (q \to \neg(\neg q \to \neg p))$;

(j) $p \to (q \to (p \wedge q))$;

(k) $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$;

(l) $((p \vee q) \to (r \wedge s)) \to (p \vee \neg r)$;

(m) $(p \to q) \wedge \neg((q \to s) \to (p \to s))$;

**18** Escreve um programa para manipular formulas da lógica proposicional com as conectivas básicas: negação, disjunção, conjunção e implicação.

(a) Dada uma fórmula deve permitir:
- dada uma valorização das variáveis, calcular a valorização da fórmula
- calcular a tabela de verdade da fórmula
- determinar se a fórmula é satisfazível, contradição ou tautologia
- obter uma fórmula em forma normal conjuntiva equivalente
- obter uma fórmula em forma normal disjuntiva equivalente

(b) Dadas duas fórmulas determinar se uma é consequência semântica da outra, concluindo se são ou não equivalentes.

**19** Considera o algoritmo de satisfabilidade para fórmulas de Horn dado no curso.

(a) Descreve o algoritmo em pseudo-código e implementa-o.

(b) Justifica a correção do algoritmo, isto é, que atribui o valor verdade se e só se a fórmula de Horn é satisfazível.

(c) Aplica o algoritmo às seguintes fórmulas:
- $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge q$
- $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$
- $\neg p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg q$
- $p \wedge (\neg p \vee q) \wedge \neg r$

**20** Aplica o algoritmo David-Putman (DLL) aos conjuntos de cláusulas seguintes.

(a)
$$\{p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee \neg r,\ p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee q, \neg p \vee r, p \vee \neg q \vee r\}$$

(b)
$$\{\neg p \vee q \vee r, p \vee q \vee r, p \vee q \vee \neg r, p \vee \neg q \vee r, p \vee \neg q \vee \neg r\}$$

(c)
$$\{p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee r, p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee r, \neg p \vee q, \neg p \vee r\}$$

(d)
$$\{p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q \vee r, p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r\}$$

(e)
$$\{p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r, \neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee q \vee \neg r, p \vee q \vee \neg r\}$$

**21** Implementa o algoritmo de David-Putman para a satisfabilidade de cláusulas.