Lógica Computacional (CC2003)
Folha de trabalho n. 2

Lógica Proposicional: sistemas dedutivos

Sistema de Dedução Natural, DN

Todas as deduções devem usar o sistema de dedução natural DN e a notação de Fitch dada nas aulas.

Observações para a obtenção de uma dedução duma fórmula φ

- Se a fórmula φ for uma implicação $\psi \to \theta$, supor ψ e deduzir θ; aplicando de seguida a regra da introdução da implicação.
- Por redução ao absurdo: supor $\neg\varphi$ e deduzir F. Caso haja uma negação $\neg\psi$ nas premissas, poder-se-á deduzir ψ para obter F.
- Suponhamos que uma das premissas é $\varphi \lor \psi$ e se pretende deduzir γ. Podemos: supor φ e deduzir γ, supor ψ e deduzir γ; aplicando de seguida a regra de eliminação da disjunção.
- Suponhamos que uma premissa é $\neg\varphi$ e pretendemos obter **F** : podemos tentar obter φ e aplicar a regra da introdução de **F** .

Notar que cada passo da dedução tem de ser obtido por aplicação duma regra ou ser uma repetição duma fórmula já deduzida ou uma premissa. Assim cada passo de dedução tem de ser ou uma suposição ou resultar da aplicação duma regra a fórmulas já deduzidas, pelo que não se podem usar "equivalências semânticas".

1 Indica se as seguintes deduções são válidas. Em caso afirmativo indica as regras usadas em cada passo. Se não for válida indica qual o passo em que não está correcta e se existe uma dedução correcta com as mesmas premissas e conclusão.

$$\begin{array}{r|l}
1 & \underline{p \lor q} \\
2 & \quad | \; \underline{p} \\
3 & \quad | \; p \\
4 & \quad | \; \underline{q} \\
5 & \quad | \; q \\
6 & p \land q
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1 & \underline{(p \land q) \lor r} \\
2 & \quad | \; \underline{p \land q} \\
3 & \quad | \; p \\
4 & \quad | \; p \lor r \\
5 & \quad | \; \underline{r} \\
6 & \quad | \; p \lor r \\
7 & p \land r
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1 & \underline{\neg(p \lor \neg q)} \\
2 & \quad | \; \underline{\neg q} \\
3 & \quad | \; p \lor \neg q \\
4 & \quad | \; \mathbf{F} \\
5 & \neg\neg q \\
6 & q
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 & \underline{p \to q} \\
2 & \quad | \; \underline{p} \\
3 & \quad | \; q \\
4 & \quad | \; \neg p \lor q \\
5 & \neg p \lor q
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1 & \underline{p \to \neg p} \\
2 & \quad | \; \underline{p} \\
3 & \quad | \; \neg p \\
4 & \quad | \; \mathbf{F} \\
5 & \neg p
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1 & \underline{\neg p \to \neg q} \\
2 & \quad | \; \underline{q} \\
3 & \quad | \; \neg q \\
4 & \quad | \; \mathbf{F} \\
5 & \quad | \; p \\
6 & q \to p
\end{array}$$

2 Mostra que:

(a) $(p \land q) \to r, p \vdash q \to r$

(b) $q \to p, q \to \neg p \vdash \neg q$

(c) $(\neg p \lor \neg q) \lor r, q \lor r, p \vdash r$

(d) $p \lor \neg q, \neg r \to q, r \to \neg s, s \vdash p$

Lógica Computacional (CC2003)
Folha de trabalho n. 2

3 Mostra que:

(a) $\delta \to (\varphi \to \psi), \neg\psi, \delta \vdash \neg\varphi$
(b) $(\delta \ \wedge \ \neg\varphi) \to \psi, \neg\psi, \delta \vdash \varphi$
(c) $\vdash (\varphi \ \vee \ \psi) \to (\psi \ \vee \ \varphi)$
(d) $\vdash (\delta \to \psi) \to ((\neg\delta \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi))$
(e) $\vdash (\delta \to (\varphi \to \psi)) \to (\varphi \to (\delta \to \psi))$
(f) $\vdash (\delta \wedge \varphi) \to \varphi$
(g) $\vdash \delta \to (\delta \vee \varphi)$
(h) $\vdash \delta \to (\neg\varphi \to \neg(\delta \to \varphi))$
(i) $\vdash (\varphi \to \delta) \to ((\neg\varphi \to \delta) \to \delta)$
(j) $\vdash ((\varphi \to \delta) \to \delta) \to ((\delta \to \varphi) \to \varphi)$
(k) $\vdash ((\varphi \to \delta) \ \wedge \ (\delta \to \varphi)) \to ((\varphi \ \vee \ \delta) \to (\varphi \ \wedge \ \delta))$
(l) $\delta, \varphi \to \psi \vdash \varphi \to (\delta \to \psi)$
(m) $\delta, \neg\varphi \vdash \neg(\delta \to \varphi)$
(n) $\vdash (\delta \to \varphi) \to (\neg\delta \ \vee \ \varphi)$
(o) $\vdash (\delta \to \varphi) \to ((\neg\delta \to \varphi) \to \varphi)$
(p) $\vdash \varphi \to (((\psi \to \varphi) \to \delta) \to \delta)$
(q) $\vdash ((\varphi \to \delta) \to \delta) \to ((\delta \to \varphi) \to \varphi)$
(r) $\vdash \varphi \ \vee \ \varphi \to \varphi$
(s) $(\psi \ \wedge \ \theta) \to \neg\delta, \varphi \to \delta, \theta, \varphi \vdash \neg\psi$
(t) $\vdash ((\psi \ \vee \ \varphi) \to (\neg\psi \to \varphi))$
(u) $\psi \ \vee \ \varphi, \psi \to \delta, \neg\theta \to \neg\varphi \vdash \delta \ \vee \ \theta$
(v) $\vdash (\psi \to \varphi) \to (\delta \ \vee \ \psi \to \delta \ \vee \ \varphi)$
(w) $\vdash ((((\varphi \to \psi) \to (\neg\delta \to \neg\gamma)) \to \delta) \to \theta) \to ((\theta \to \varphi) \to (\gamma \to \varphi))$
(x) $(\psi \to \varphi) \ \wedge \ (\varphi \to \psi) \vdash (\psi \ \wedge \ \varphi) \ \vee \ (\neg\psi \ \wedge \ \neg\varphi)$
(y) $(\psi \to \varphi) \ \vee \ (\delta \to \gamma) \vdash (\psi \to \gamma) \ \vee \ (\delta \to \varphi)$
(z) $\psi \vdash (\psi \ \wedge \ \varphi) \ \vee \ (\psi \ \vee \ \neg\varphi)$

Nota: Caso uses regras derivadas, terás que as mostrar separamente.

4 Indica quais das seguintes deduções são válidas e quais não são válidas:

(a) $\neg\delta, \delta \ \vee \ \varphi \vdash \varphi$
(b) $\varphi \ \wedge \ \neg\varphi \vdash \neg(\delta \to \psi) \ \wedge \ (\delta \to \psi)$
(c) $\neg(\neg\delta \ \vee \ \varphi) \vdash \delta$
(d) $\delta \ \vee \ \psi, \neg\psi \ \vee \ \varphi \vdash \delta \ \vee \ \varphi$
(e) $\neg(\delta \to \psi) \vdash \psi \to \delta$
(f) $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$
(g) $\vdash (\neg\delta \to \delta) \to \delta$
(h) $\neg\delta \to \neg\psi \vdash \neg\psi \to \neg\delta$

5 Justifica a validade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes, apresentando demonstrações ou contra-exemplos:

(a) se $\vdash \psi$, então $\delta_1, \ldots, \delta_n \vdash \psi$;
(b) se $\delta_1, \ldots, \delta_n \vdash \psi$, então $\vdash \psi$;
(c) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$, então $\delta_2, \delta_1 \vdash \psi$;

(d) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \varphi \to \psi$ e $\delta_1, \delta_2 \vdash \varphi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;

(e) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \varphi \to \psi$ e $\delta_1 \vdash \varphi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;

(f) se $\delta_1, \delta_2 \vdash \varphi \to \psi$ e $\delta_1 \vdash \varphi$, então $\delta_1 \vdash \psi$;

(g) se $\delta_1 \vdash \varphi \to \psi$ e $\delta_2 \vdash \varphi$, então $\delta_1, \delta_2 \vdash \psi$;

(h) se $\delta, \delta \vdash \psi$ se e só se $\delta \vdash \psi$.

6 Mostra sem usar a completude de DN as seguintes equivalencias dedutivas. Nota que tens de mostrar que da primeita fórmula se deduz a segunda e vice-versa.

(a) $\neg(\delta_1 \wedge \delta_2) \dashv\vdash \neg\delta_1 \vee \neg\delta_2$

(b) $\neg(\delta_1 \vee \delta_2) \dashv\vdash \neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2$

(c) $\delta_1 \to \delta_2 \dashv\vdash \neg\delta_1 \vee \delta_2$

(d) $\neg(\delta_1 \to \delta_2) \dashv\vdash \delta_1 \wedge \neg\delta_2$

(e) $\neg\delta_1 \wedge \delta_2 \vdash \delta_1 \vee \delta_2$

(f) $\neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2 \vdash \delta_1 \to \delta_2$

(g) $\delta_1 \wedge \delta_2 \vdash \delta_1 \vee \delta_2$

(h) $\delta_1 \wedge \neg\delta_2 \vdash \neg(\delta_1 \wedge \delta_2)$

(i) $(\psi \wedge \varphi) \wedge \delta \dashv\vdash \psi \wedge (\varphi \wedge \delta)$

(j) $(\psi \vee \varphi) \vee \delta \dashv\vdash \psi \vee (\varphi \vee \delta)$

(k) $\neg(\neg\delta_1 \wedge \neg\delta_2) \dashv\vdash \delta_1 \vee \delta_2$

(l) $\delta \to \varphi \dashv\vdash (\delta \to (\delta \wedge \varphi)) \wedge ((\delta \wedge \varphi) \to \delta)$

(m) $\delta_1 \to \delta_2 \dashv\vdash \neg(\delta_1 \wedge \neg\delta_2)$

(n) $\delta \to \varphi \dashv\vdash (\varphi \to (\delta \vee \varphi)) \wedge ((\delta \vee \varphi) \to \varphi)$

(o) $\delta_1 \wedge \delta_2 \dashv\vdash \neg(\neg\delta_1 \vee \neg\delta_2)$

(p) $(\delta \to \varphi) \wedge (\varphi \to \delta) \dashv\vdash (\delta \vee \varphi) \to (\delta \wedge \varphi)$

(q) $(\delta \to \varphi) \dashv\vdash (\neg\varphi \to \neg\delta)$

(r) $(\delta \to \varphi) \wedge (\varphi \to \delta) \dashv\vdash (\delta \vee \varphi) \to (\delta \wedge \varphi)$

(s) $\varphi \wedge (\delta \vee \psi) \dashv\vdash (\varphi \wedge \delta) \vee (\varphi \wedge \psi)$

(t) $(\varphi \vee \psi) \to \delta \dashv\vdash (\varphi \to \delta) \wedge (\psi \to \delta)$

(u) $(\delta \vee \varphi) \wedge (\delta \vee \psi) \dashv\vdash \delta \vee (\varphi \wedge \psi)$

(v) $\varphi \to (\psi \wedge \delta) \dashv\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \delta)$

7 Completa a demonstração do teorema da integridade do sistema de dedução natural, verificando que se existe um passo p em que a fórmula não é consequência semântica das premissas assumidas em p esse passo não pode resultar da aplicação das seguintes regras:

(a) $\wedge$ **I**

(b) $\wedge$ **E**

(c) $\vee$ **I**

(d) $\vee$ **E**

(e) $\neg$**I**

(f) $\neg$**E**

8 Um conjunto de fórmulas Σ diz-se *formalmente completo* se para qualquer fórmula δ se tem

$$\Sigma \vdash \delta \text{ ou } \Sigma \vdash \neg\delta$$

Mostra que um conjunto de fórmulas da lógica proposicional Σ é *formalmente completo* se e só se para qualquer variável proposicional p se tem:

$$\Sigma \vdash p \text{ ou } \Sigma \vdash \neg p$$

Sugestão: usa indução estrutural nas fórmulas da lógica proposicional.

9 Mostra, sem usar a completude de nenhum sistema de dedução, que qualquer que seja o conjunto de fórmulas da lógica proposicional Σ e δ uma fórmula, se tem:

(a) Se $\Sigma \vdash \neg\delta$ então $\Sigma \cup \{\delta\}$ é inconsistente.

(b) $\Sigma \models \delta$ se e só se $\Sigma \cup \{\neg\delta\}$ não é satisfazível.

(c) $\Sigma \cup \{\neg\delta\} \vdash \mathbf{F}$ se e só se $\Sigma \vdash \delta$

10 Justifica a veracidade ou a falsidade das afirmações seguintes. Caso a afirmação seja falsa, poderás apresentar um contra-exemplo.

(a) Sendo Σ um conjunto de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:
   1. Σ é inconsistente.
   2. $\Sigma \vdash \delta$ qualquer que seja a fórmula δ da lógica proposicional.

(b) Sendo Σ e Γ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional, são equivalentes:
   1. $\Sigma \cup \Gamma$ é satisfazível.
   2. $\Sigma \cup \{\delta\}$ é satisfazível qualquer que seja a fórmula $\delta \in \Gamma$.

(c) Sejam Σ e Γ dois conjuntos de fórmulas da lógica proposicional . Então

$$\{\delta \mid \Sigma \cup \Gamma \vdash \delta\} = \{\delta \mid \Sigma \vdash \delta\} \cup \{\delta \mid \Gamma \vdash \delta\}.$$

11 Sejam Σ e Γ conjuntos de fórmulas da lógica proposicional tais que para qualquer fórmula δ se tem $\Sigma \vdash \delta$ ou $\Gamma \vdash \delta$.

(a) Mostra que $\Sigma \cup \Gamma$ é não satisfazível.

(b) Mostra que um dos conjuntos Σ ou Γ não é satisfazível.

12 Sejam Σ e Γ conjuntos de fórmulas do lógica proposicional, tal que para toda a fórmula δ se tem

$$\Sigma \vdash \delta \text{ se e só se } \Gamma \vdash \delta.$$

Justifica a validade ou a falsidade de cada uma das afirmações seguintes, apresentando demonstrações ou contra-exemplos:

(a) Seja $\delta_1, \ldots, \delta_n$ é uma dedução de uma fórmula δ a partir do conjunto Σ. Então $\delta_1, \ldots, \delta_n$ é também uma dedução de δ a partir de Γ.

(b) Sejam $\overline{\Gamma} = \{\neg\delta \mid \delta \in \Gamma\}$ e $\delta_1, \ldots, \delta_n$ uma dedução de uma fórmula δ a partir do conjunto Γ, então $\neg\delta_1, \ldots, \neg\delta_n$ é uma dedução de $\neg\delta$ a partir do conjunto de hipóteses $\overline{\Gamma}$;

(c) Σ é satisfazível se e só se Γ é satisfazível.

Outros sistemas dedutivos: *tableaux* e resolução

13 Constrói deduções de *tableaux* semânticos para as fórmulas seguintes. Um dedução de uma fórmula φ por *tableaux* é uma refutação, isto é, de $\neg\varphi$ tenta-se deduzir $\mathbf{F}$.

(a) $\neg((p \lor q) \land (\neg p \land \neg q))$

(b) $((p \to q) \land (q \to r)) \to (p \to r)$

(c) $(\neg p \to q) \to ((p \to q) \to q)$

(d) $((p \to q) \to p) \to p$

14 Considera a fórmula seguinte em forma normal conjuntiva (FNC):

$$(p \lor \neg q \lor r) \land \neg p \land (q \lor r \lor p) \land (p \lor \neg r)$$

(a) Converte a fórmula para um conjunto de cláusulas.

(b) A partir desse conjunto constrói uma dedução de **F** , usando apenas a regra da resolução.

15 Encontra uma dedução de **F** (uma refutação) para:

$$\{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{\neg r\}\}$$

16 Usando a regra de resolução, encontra uma dedução por resolução de:

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to \neg(\neg r \wedge p)$$

17 Constrói deduções de *tableau* e por **resolução** para as seguintes fórmulas:

(a) $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

(b) $q \to (p \to (q \wedge p))$

(c) $q \to (\neg p \to \neg(q \to p))$

18 Constrói deduções de *tableau* e por **resolução** para as alineas do exercício 3 que não tenham premissas.

Lógica Computacional (CC2003)
Folha de trabalho n. 2

Sistema de Dedução Natural, DN.

<table>
<tr><th></th><th>Introdução</th><th>Eliminação</th></tr>
<tr><td>$\land$</td><td>$\begin{array}{|l} \varphi \\ \vdots \\ \psi \\ \vdots \\ \varphi \land \psi \qquad \land\mathrm{I} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|l} \vdots \\ \varphi \land \psi \\ \vdots \\ \varphi \qquad \land\mathrm{E} \end{array}$ $\begin{array}{|l} \vdots \\ \varphi \land \psi \\ \vdots \\ \psi \qquad \land\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\lor$</td><td>$\begin{array}{|l} \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ \varphi \lor \psi \qquad \lor\mathrm{I} \end{array}$ $\begin{array}{|l} \vdots \\ \varphi \\ \vdots \\ \psi \lor \varphi \qquad \lor\mathrm{I} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|l} \varphi \lor \psi \\ \vdots \\ \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} \\ \begin{array}{|l} \psi \\ \hline \vdots \\ \gamma \end{array} \\ \gamma \qquad \lor\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\neg$</td><td>$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \mathbf{F} \end{array} \\ \neg\varphi \qquad \neg\mathrm{I} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|l} \vdots \\ \neg\neg\varphi \\ \vdots \\ \varphi \qquad \neg\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{F}$</td><td>$\begin{array}{|l} \varphi \\ \vdots \\ \neg\varphi \\ \vdots \\ \mathbf{F} \quad \mathbf{F\ I} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|l} \vdots \\ \mathbf{F} \\ \vdots \\ \varphi \quad \mathbf{F\ E} \end{array}$</td></tr>
<tr><td>$\to$</td><td>$\begin{array}{|l} \begin{array}{|l} \varphi \\ \hline \vdots \\ \psi \end{array} \\ \varphi \to \psi \qquad \to\mathrm{I} \end{array}$</td><td>$\begin{array}{|l} \varphi \\ \vdots \\ \varphi \to \psi \\ \vdots \\ \psi \qquad \to\mathrm{E} \end{array}$</td></tr>
</table>

Regra da Repetição

$$\frac{\varphi}{\varphi}\,\mathbf{R}$$

Lógica Computacional (CC2003)
Folha de trabalho n. 2

Algumas regras derivadas:

$$\frac{\varphi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\varphi}\,\mathbf{MT}$$

$$\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}\,\neg\neg\mathbf{I}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots \\ \mathbf{F}\end{array}}{\varphi}\,\mathbf{RA}$$

$$\frac{}{\varphi \ \vee \ \neg\varphi}\,\mathbf{TE}$$

Tableaux

α	α_1	α_2	β	β_1	β_2
$\varphi \wedge \psi$	φ	ψ	$\neg(\varphi \wedge \psi)$	$\neg\varphi$	$\neg\psi$
$\neg(\varphi \vee \psi)$	$\neg\psi$	$\neg\varphi$	$\varphi \vee \psi$	φ	ψ
$\neg(\varphi \to \psi)$	φ	$\neg\psi$	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi$	ψ

Tabela 1: Notação uniforme: fórmulas α e β

$\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$	$\frac{\neg\mathbf{F}}{\mathbf{V}}$	$\frac{\neg\mathbf{V}}{\mathbf{F}}$	$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$	$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$

Tabela 2: Regras de expansão dos *tableaux*

Resolução

Sendo C, C' cláusulas a regra de resolução é

$$\frac{C \cup \{p\} \qquad C' \cup \{\neg p\}}{C \cup C'}$$

Uma dedução de **F** a partir de um conjunto C de cláusulas diz-se uma refutação C.