Lógica Computacional (CC2003)- Folha de trabalho n. 4

1 Sistema de dedução natural DN para a lógica de $1^{\underline{a}}$ ordem

Observações para a obtenção de uma dedução duma fórmula φ

- Se a fórmula φ for uma implicação $\psi \to \theta$, supor ψ e deduzir θ; aplicando de seguida a regra da introdução da implicação.
- Por redução ao absurdo: supor $\neg\varphi$ e deduzir $\mathbf{F}$. Caso haja uma negação $\neg\psi$ nas premissas, poder-se-á deduzir ψ para obter F.
- Suponhamos que uma das premissas é $\varphi \vee \psi$ e se pretender deduzir γ. Podemos: supor φ e deduzir γ, supor ψ e deduzir γ; aplicando de seguida a regra de eliminação da disjunção.
- Suponhamos que uma premissa é $\neg\varphi$ e pretendemos obter $\mathbf{F}$: podemos tentar obter φ e aplicar a regra da introdução de $\mathbf{F}$.
- Se uma premissa for $\exists x\varphi$ e se pretende deduzir γ. Podemos: com uma variável nova v supor $\varphi[v/x]$ e deduzir γ (sendo que em γ v não pode ocorrer). Depois aplicar a regra da introdução de $\exists$.

Notar que cada passo da dedução tem de ser obtido por aplicação duma regra ou ser uma repetição duma fórmula já deduzida ou uma premissa.

1 Indica se as seguintes deduções são válidas. Em caso afirmativo indica as regras usadas em cada passo. Se não for válida indica qual o passo em que não está correcta e se existe uma dedução correcta com as mesmas premissas e conclusão.

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x(P(x) \vee Q(x)) \\ \hline
2 & u \begin{array}{|l} P(u) \vee Q(u) \\ P(u) \end{array} \\
3 & \\
4 & \forall x P(x) \\
5 & \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \forall x\ (P(x) \to Q(x)) \\
2 & \exists x\ P(x) \\ \hline
3 & v \begin{array}{|l} P(v) \\ \hline P(v) \to Q(v) \\ Q(v) \end{array} \\
4 & \\
5 & \\
6 & \exists x\ Q(x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \exists x\ P(x) \\ \hline
2 & u \begin{array}{|l} P(u) \end{array} \\
3 & \forall x\ P(x)
\end{array}
$$

2 Usando o sistema de dedução natural para a lógica de $1^{\underline{a}}$ ordem e sem usar a completude, mostra em notação de Fitch:

(a) $\forall x(R(x) \wedge S(x)) \vdash \forall x\ R(x) \wedge \forall x S(x)$

(b) $\forall x(R(x) \to S(x)) \vdash \forall x\ R(x) \to \forall x\ S(x)$

(c) $\exists x(R(x) \wedge S(x)) \vdash \exists x\ R(x) \wedge \exists x\ S(x)$

(d) $\forall x(P(x) \vee Q(x)), \exists x\neg Q(x), \forall x(R(x) \to \neg P(x)) \vdash \exists x\neg R(x)$

(e) $\forall x(P(x) \to (Q(x) \vee R(x))), \neg\exists x(P(x) \wedge R(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$

(f) $\exists x\exists y(P(x,y) \vee P(y,x)) \vdash \exists x\exists y\ P(x,y)$

(g) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)), \forall x(P(x) \to R(x)) \vdash \exists x(R(x) \wedge Q(x))$

(h) $\forall x(P(x) \leftrightarrow x = b) \vdash P(b) \wedge \forall x\forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y)$, onde $\psi \leftrightarrow \varphi$ é uma abreviatura de $\psi \to \varphi$ e $\varphi \to \psi$

(i) $\exists x\forall y(P(x) \wedge (P(y) \to y = x)) \vdash \forall x\forall y((P(x) \wedge P(y)) \to x = y)$

(j) $\forall x\ P(a,x,x), \forall x\forall y\forall z(P(x,y,z) \to P(f(x),y,f(z))) \vdash P(f(a),a,f(a))$

(k) $\exists x\exists y(H(x,y) \vee H(y,x)), \neg\exists x H(x,x) \vdash \exists x\exists y\ \neg(x = y)$

(l) $\forall x\forall y\ R(x,y) \vdash \forall y\forall x\ R(x,y)$

(m) $\vdash \forall x\forall y\forall u\forall v((x = u \wedge y = v) \to (P(x,y) \to P(u,v)))$

(n) $\exists y \exists x\, Q(y,x) \vdash \exists x \exists y\, Q(y,x)$
(o) $\exists x \forall y\, P(x,y) \vdash \forall y \exists x\, P(x,y)$
(p) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists x\, P(x) \to \exists x\, Q(x))$
(q) Se x não ocorre livre em φ, $\exists x \psi \vee \varphi \dashv\vdash \exists x(\psi \vee \varphi)$
(r) $\vdash \forall x \forall y(x = y \to f(x) = f(y))$
(s) $\vdash x = f(y) \to \forall z(P(x,z) \to P(f(y),z))$
(t) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v((x = u \wedge y = v) \to f(x,y) = f(u,v)))$
(u) $\vdash \forall x \forall y(\neg(f(x) = f(y)) \to \neg(x = y))$
(v) $\vdash \forall x \forall y \forall u \forall v(x = u \to (y = v \to f(x,y) = f(u,v)))$
(w) $\vdash \exists x(P(x) \to R(x)) \to (\forall x(P(x) \to \exists x R(x)))$
(x) $\vdash (\exists x P(x) \to \forall x Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$
(y) $\vdash \forall x(S(x) \to R(x)) \to (\exists x \neg R(x) \to \exists x \neg S(x))$
(z) $\vdash \forall x(\neg P(x) \to S(x)) \to (\exists x \neg S(x) \to \exists x\, P(x))$

3 Seja Σ um conjunto de fórmulas de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ tal que x não ocorre livre em nenhuma fórmula de Σ. Mostra que,

(a) se $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ e x não ocorre livre em ψ, então $\Sigma \cup \{\exists x \varphi\} \vdash \psi$;
(b) se $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, então $\Sigma \cup \{\exists x \varphi\} \vdash \exists x \psi$.

Completude e integridade da lógica 1ª ordem.

4 Para cada uma das fórmulas seguintes, indica se é ou não um teorema da lógica de 1ª ordem, quaisquer que sejam as fórmulas φ e ψ. Justifica, mostrando que existe uma dedução natural da respectiva fórmula ou então indicando uma linguagem $\mathcal{L}$, fórmulas ψ e φ de $\mathcal{L}$ e uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$, tal que $\mathcal{A}$ não é modelo da fórmula correspondente.

(a) (*) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$
$(\forall x\, \varphi \to \forall x\, \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$
(b) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\, \varphi \to \forall x\, \psi)$
$(\exists x\, \varphi \to \exists x\, \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$
(c) $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\, \varphi \to \exists x\, \psi)$
$(\exists x\, \varphi \to \forall x\, \psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$
(d) $\forall x \exists y(\varphi \vee \psi) \to \exists x \forall y(\varphi \wedge \psi)$
$\forall x(\psi \vee \varphi) \to \neg \exists x(\neg \psi \wedge \neg \varphi)$
(e) $\exists x \neg(\varphi \vee \psi) \to \exists x(\neg \varphi \vee \neg \psi)$
$\exists y(\varphi \wedge \psi) \to (\forall y\, \varphi \wedge \forall y\, \psi)$
(f) $(\forall x\, \psi \vee \forall x\, \varphi) \to \exists x(\psi \vee \varphi)$
$\forall x \exists y\, \psi \to \exists y \forall x\, \psi$
(g) $(\exists x\, \psi \wedge \exists x\, \varphi) \to \exists x(\psi \wedge \varphi)$
$\exists x(\neg \psi \wedge \neg \varphi) \to \exists x(\neg(\psi \wedge \varphi))$
(h) $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\exists x\, \psi \to \exists x\, \varphi)$
$\exists x \exists y(\varphi \vee \psi) \to \forall y \exists x(\varphi \vee \psi)$
(i) $\exists x \forall y\, \psi \to \exists x \exists y\, \psi$
$\forall x \exists y(\varphi \wedge \psi) \to \exists x \forall y(\varphi \wedge \psi)$
(j) $\forall x(\psi \to \neg \varphi) \to \neg \exists x(\psi \wedge \varphi)$
$(\exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$
(k) $\forall x(\neg \psi \to \varphi) \to (\exists x \neg \varphi \to \exists x\, \psi)$
$\neg(\forall x \exists y\, \psi \to \exists y \forall x\, \psi)$

(l) $\exists x\, \neg(\psi \;\vee\; \varphi) \to \exists y(\neg\psi \;\vee\; \neg\varphi)[y/x]$, onde y não ocorre em ψ nem φ.
$(\exists x\, \neg\varphi \to \exists x\, \neg\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$.

(m) $\forall x(\psi \to \varphi) \to (\exists x \neg\varphi \to \exists x \neg\psi)$
$(\exists x\; \varphi \vee \exists x\; \psi) \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

(n) $(\exists x\; \psi \;\vee\; \exists x\; \varphi) \to \exists x(\psi \;\vee\; \varphi)$
$\exists x(\psi \;\vee\; \varphi) \to (\exists x\; \psi \;\vee\; \exists x\; \varphi)$

(o) $\exists x(\psi \to \varphi) \to (\forall x\; \psi \to \exists x\; \varphi)$
$(\forall x\; \psi \to \exists x\; \varphi) \to \exists x(\psi \to \varphi)$

5 Completa a demonstração do teorema da integridade do sistema de dedução natural para a lógica de 1ª ordem, verificando que se no passo de indução a regra a aplicar for uma das seguintes, a fórmula resultante é consequência semântica das premissas aí assumidas:

(a) $\forall$**E** ou $\exists$**I**

(b) $=$ **E** ou $\to$ **I**

(c) $\forall$**I** ou $\wedge$ **E**

(d) $\vee$ **E** ou $\neg$**I**

(e) $\vee$ **I** ou **F I**

6 Seja ψ uma proposição de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$. Relaciona as afirmações seguintes, indicando se são equivalentes ou se apenas uma implica a outra **justificando**.

(a) – existe uma estrutura $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}$ e uma interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \not\models_s \neg\psi$;
– ψ é uma fórmula válida.

(b) – $\vdash \psi$
– $\neg\psi$ é falso em todas as estruturas de $\mathcal{L}$.

(c) – $\models \psi$
– existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{A} \models \neg\psi$ e $\mathcal{B} \not\models \neg\psi$.

7 Seja ψ uma fórmula de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ para a qual existem duas estruturas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{L}$ tais que $\mathcal{A} \models_s \psi$ para toda a interpretação s das variáveis em $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \not\models_t \psi$ para toda a interpretação t das variáveis em $\mathcal{B}$. Justifica a validade ou falsidade das afirmações seguintes:

– ψ é uma proposição;

– ψ não é uma fórmula válida;

– $\neg\psi$ não é uma fórmula válida.

8 Um conjunto consistente Δ diz-se maximal se para qualquer fórmula ψ se tem ou $\psi \in \Delta$ ou $\neg\psi \in \Delta$. Mostra que se Δ é um conjunto consistente maximal e $\Delta \vdash \theta$, então $\theta \in \Delta$.

9 Um conjunto Σ de proposições de uma linguagem de primeira ordem $\mathcal{L}$ diz-se completo (em $\mathcal{L}$) se e só se para toda a proposição ψ de $\mathcal{L}$ se tem $\psi \in \Sigma$ ou $\neg\psi \in \Sigma$. Mostra que um conjunto consistente Σ é completo se e só se para toda a proposição ψ de $\mathcal{L}$, se $\psi \notin \Sigma$, então $\Sigma \cup \{\psi\}$ é inconsistente.

2 Axiomatizações

10 Considerando a linguagem de 1ª ordem para a aritmética dada nas aulas e os axiomas de Peano (**PA**) para a teoria dos números obtém deduções naturais (com notação de Fitch) para as fórmulas ψ seguintes (i.e **PA** $\vdash \psi$). **Para cada alínea podes considerar que as anteriores correspondem a teoremas, que poderás usar.**

Lógica Computacional (CC2003)- Folha de trabalho n. 4

Axiomas de Peano (PA)

1. $\forall x(x+1 \neq 0)$
2. $\forall x \forall y(x+1 = y+1 \rightarrow x = y)$
3. $0+1=1$
4. $\forall x\ (x+0=x)$
5. $\forall x \forall y\ (x+(y+1)=(x+y)+1)$
6. $\forall x\ (x \times 0 = 0)$
7. $\forall x \forall y\ (x \times (y+1) = (x \times y) + x)$
8. (princípio da indução) $(\varphi[0/x]\ \wedge\ \forall x(\varphi \rightarrow \varphi[x+1/x])) \rightarrow \forall x\ \varphi$

Uso do Axioma 8 (princípio da indução): sendo $\forall x \varphi$ o que pretendes deduzir, deduz-se primeiro $\varphi([0/x])$ e depois $\forall x(\varphi \rightarrow \varphi[x+1/x])$ (e aplicando o axioma 8 e **modus ponens** tem-se o que se pretende.)

(a) $\forall x\ (0+x=x)$

(b) $\forall x\ (1 \times x = x)$

(c) $\forall x\ (0 \times x = 0)$

(d) $\forall x\ (x+0=0+x)$

(e) $\forall x\ (x+1=1+x)$

(f) $\forall x\ (x \times 1 = x)$

(g) $\forall x\ (1 \times x = x \times 1)$

(h) $\forall x \forall y\ ((x+y)+0 = x+(y+0))$

(i) $\forall z \forall x \forall y\ ((x+y)+z = x+(y+z))$ usando indução em z.

(j) $\forall y \forall x\ ((x+1) \times y = (x \times y) + y)$ usando indução em y

(k) $\forall y \forall x\ (x+y=y+x)$, usando indução em y

(l) $\forall x \forall y\ ((x \times y) \times 0 = x \times (y \times 0))$.

(m) $\forall z \forall y \forall x\ (z \times (x+y) = (z \times x) + (z \times y))$, usando indução em z.

(n) $\forall z \forall x \forall y\ ((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$, usando indução em z

(o) $\forall y \forall x\ (x \times y = y \times x)$, usando indução em y.

11 Seja $\mathcal{L}_N$ a linguagem de 1ª ordem com igualdade para os números naturais tal que $\mathcal{F}_0 = \{0, 1\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{+, \times\}$ (e onde os termos e as fórmulas atómicas são representados em notação infixa). Seja $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \cdot^{\mathcal{N}})$ a estrutura onde $\cdot^{\mathcal{N}}$ associa aos símbolos funcionais os correspondentes valores e operações aritméticas. Considera ainda os axiomas de Peano, **PA**. Nota: Representa o número 2 pelo termo $\mathtt{1} + \mathtt{1}$.

a)
- Define uma fórmula $\mathtt{Impar}(x)$ de $\mathcal{L}_N$ tal que $\mathcal{N} \models_s \mathtt{Impar}(x)$ se e só se $s(x)$ é impar, i.e se o resto da divisão inteira por 2 é 1.
- Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que $\mathbf{PA} \vdash \mathtt{Impar}(\mathtt{1})$.

b)
- Define uma fórmula $\mathtt{Par}(y)$ de $\mathcal{L}_N$, tal que $\mathcal{N} \models_s \mathtt{Par}(y)$ se e só se $s(y)$ é par.
- Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que $\mathbf{PA} \vdash \mathtt{Par}(\mathtt{0})$.

c)
- Define uma fórmula $\mathtt{Primo}(y)$ de $\mathcal{L}_N$, tal que $\mathcal{N} \models_s \mathtt{Primo}(y)$ se e só se $s(y)$ é primo.
- Mostra, usando o sistema dedutivo de dedução natural, que $\mathbf{PA} \vdash \mathtt{Primo}(2)$.

	Introdução	**Eliminação**
$\wedge$	φ $\vdots$ ψ $\vdots$ $\varphi \wedge \psi$ $\quad\wedge$I	$\vdots$ $\varphi \wedge \psi$ $\vdots$ φ $\quad\wedge$E $\vdots$ $\varphi \wedge \psi$ $\vdots$ ψ $\quad\wedge$E
$\vee$	$\vdots$ φ $\vdots$ $\varphi \vee \psi$ $\quad\vee$I $\vdots$ φ $\vdots$ $\psi \vee \varphi$ $\quad\vee$I	$\varphi \vee \psi$ $\vdots$ $\quad\varphi$ $\quad\vdots$ $\quad\gamma$ $\quad\psi$ $\quad\vdots$ $\quad\gamma$ γ $\quad\vee$E
$\neg$	$\quad\varphi$ $\quad\vdots$ $\quad$**F** $\neg\varphi$ $\quad\neg$I	$\vdots$ $\neg\neg\varphi$ $\vdots$ φ $\quad\neg$E
F	φ $\vdots$ $\neg\varphi$ $\vdots$ **F** **F I**	$\vdots$ **F** $\vdots$ φ **F E**
$\rightarrow$	$\quad\varphi$ $\quad\vdots$ $\quad\psi$ $\varphi \rightarrow \psi$ $\quad\rightarrow$I	φ $\vdots$ $\varphi \rightarrow \psi$ $\vdots$ ψ $\quad\rightarrow$E

	Introdução	**Eliminação**
$=$	$\vdots$ $t = t$ $\quad =\mathbf{I}$	$t_1 = t_2$ $\vdots$ $\varphi[t_1/x]$ $\vdots$ $\varphi[t_2/x]$ $\quad =\mathbf{E}$ e x é substituível por t_1 e por t_2 em φ
$\forall$	v $\vdots$ $\varphi[v/x]$ $\forall x\ \varphi$ $\quad \forall\mathbf{I}$ onde v é uma variável nova (não ocorre antes)	$\forall x\ \varphi$ $\vdots$ $\varphi[t/x]$ $\quad \forall\mathbf{E}$ onde x é substituível por t em φ
$\exists$	$\varphi[t/x]$ $\vdots$ $\exists x\ \varphi$ $\quad \exists\mathbf{I}$ onde x é substituível por t em φ	$\exists x\ \varphi$ v $\varphi[v/x]$ $\vdots$ ψ ψ $\quad \exists\mathbf{E}$ onde v é uma variável nova que não ocorre antes nem em ψ

Resolução de exercícios selecionados (*)

Resolução 4.a

Para a primeira fórmula é possível construir uma dedução:

1	$\forall x(\varphi \to \psi)$	
2	$\forall x \varphi$	
3	u $\varphi[u/x]$	$\forall$E, 2
4	$(\varphi \to \psi)[u/x]$	$\forall$E, 1
5	$\varphi[u/x] \to \psi[u/x]$	R, 4
6	$\psi[u/x]$	$\to$E, 3, 5
7	$\forall x \psi$	$\forall$I, 3–6
8	$\forall x \varphi \to \forall x \psi$	$\to$I, 2–7

A segunda não é válida pelo que basta indicar um exemplo. Seja a linguagem $\mathcal{L}$ com o alfabeto $\mathcal{R}_1 = \{R, S\}$ e $\psi = R(x)$ e $\varphi = S(x)$.

Seja a estrutura $\mathcal{A}$ onde $A = \mathbb{N}$ e $R^A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$ e $S^A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é ímpar}\}$. Então podemos concluir que $\mathcal{A} \not\models (\forall x R(x) \to \forall x S(x)) \to \forall x (R(x) \to S(x))$. Nota que $\mathcal{A} \not\models (\forall x R(x)$, $\mathcal{A} \not\models \forall x S(x))$ e $\mathcal{A} \not\models \forall x(R(x) \to S(x))$ pelo que na implicação principal o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

Resolução 10.10.a

1	$\forall x(x+1 \neq 0)$	
2	$\forall x \forall y(x+1 = y+1 \rightarrow x = y)$	
3	$0+1=1$	
4	$\forall x\ x+0=x$	
5	$\forall x \forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$	
6	$\forall x\ x \times 0 = 0$	
7	$\forall x \forall y\ x \times (y+1) = (x \times y) + x$	
8	$(\varphi[0/x]\ \wedge\ (\forall x(\varphi \rightarrow \varphi[x+1/x]))) \rightarrow \forall x \varphi$	
9	$0+0=0$	$\forall$E, 4
10	u $\quad 0+u=u$	
11	$\quad \forall y\ 0+(y+1)=(0+y)+1$	$\forall$E, 7
12	$\quad 0+(u+1)=(0+u)+1$	$\forall$E, 7, 11
13	$\quad 0+(u+1)=u+1$	$=$**E**, 10, 12
14	$0+u=u \rightarrow 0+(u+1)=u+1$	$\rightarrow$I, 10–13
15	$\forall x(0+x=x \rightarrow 0+(x+1)=x+1)$	$\forall$I, 10–14
16	$0+0=0\ \wedge\ \forall x(0+x=x \rightarrow 0+(x+1)=x+1)$	$\wedge$I, 10, 15
17	$\forall x(0+x=x)$	$\rightarrow$E, 8, 16

Resolução 10.10.b

1	$\forall x(x+1 \neq 0)$	
2	$\forall x \forall y(x+1 = y+1 \rightarrow x = y)$	
3	$0+1=1$	
4	$\forall x\ x+0=x$	
5	$\forall x \forall y\ x+(y+1)=(x+y)+1$	
6	$\forall x\ x \times 0 = 0$	
7	$\forall x \forall y\ x \times (y+1) = (x \times y) + x$	
8	$(\varphi[0/x]\ \wedge\ (\forall x(\varphi \rightarrow \varphi[x+1/x]))) \rightarrow \forall x \varphi$	
9	$1 \times 0 = 0$	$\forall$E, 6
10	u $\quad 1 \times u = u$	
11	$\quad \forall y\ 1 \times (y+1) = (1 \times y)+1$	$\forall$E, 7
12	$\quad 1 \times (u+1) = (1 \times u)+1$	$\forall$E, 7
13	$\quad 1 \times (u+1) = u+1$	$=$**E**, 10, 12
14	$1 \times u = u \rightarrow 1 \times (u+1) = u+1$	$\rightarrow$I, 10–13
15	$\forall x(1 \times x = x \rightarrow 1 \times (x+1) = x+1)$	$\forall$I, 10–14
16	$1 \times 0 = 0\ \wedge\ \forall x(1 \times x = x \rightarrow 1 \times (x+1) = x+1)$	$\wedge$I, 9, 15
17	$\forall x 1 \times x = x$	$\rightarrow$E, 8, 16

Resolução 10.10.e

1	$\forall x(x+1 \neq 0)$	
2	$\forall x \forall y(x+1 = y+1 \to x = y)$	
3	$0+1=1$	
4	$\forall x\ x+0=x$	
5	$\forall x \forall y\ x+(y+1) = (x+y)+1$	
6	$\forall x\ x \times 0 = 0$	
7	$\forall x \forall y\ x \times (y+1) = (x \times y) + x$	
8	$(Q(0)\ \wedge\ (\forall x(Q(x) \to Q(x+1)))) \to \forall x Q(x)$	
9	$1+0=1$	$\forall$E, 4
10	$0+1=1+0$	=**I**, 3, 9
11	u $\quad u+1=1+u$	
12	$\forall y\ 1+(y+1) = (1+y)+1$	$\forall$E, 7
13	$1+(u+1) = (1+u)+1$	$\forall$E, 7, 12
14	$1+u = u+1$	= simetria, 11
15	$1+(u+1) = (u+1)+1$	=**E**, 14, 13
16	$(u+1)+1 = 1+(u+1)$	= simetria, 15
17	$u+1=1+u \to (u+1)+1 = 1+(u+1)$	$\to$I, 11–16
18	$\forall x(x+1=1+x \to (x+1)+1 = 1+(x+1))$	$\forall$I, 11–17
19	$0+1=1\ \wedge\ \forall x(x+1=1+x \to (x+1)+1 = 1+(x+1))$	$\wedge$I, 10, 18
20	$\forall x(x+1=1+x)$	$\to$E, 8, 19