Lógica Computacional (CC2003)

Nelma Moreira

Lógica Computacional 23

Conteúdo

1 Introdução à Programação em Lógica

1.1 Fórmulas de Horn

Fórmulas de Horn para Lógica Proposicional

Uma *fórmula de Horn* é uma fórmula em forma normal conjuntiva em que em cada disjunção (cláusula) existe no máximo um literal positivo.

$$p \land \neg q \land (q \lor \neg p)$$
$$(\neg p \lor \neg q \lor \neg s \lor p) \land (\neg q \lor \neg r \lor p) \land (\neg p \lor \neg s \lor s)$$
$$(\neg p \lor \neg q \lor \neg s) \land (\neg q \lor \neg r \lor p) \land s$$

Numa fórmula de Horn, as disjunções $\neg p_1 \lor \ldots \lor \neg p_n \lor p$ também se podem escrever como

$$(p_1 \land \ldots \land p_n) \to p$$

ou se p não existe (ou é $\mathbf{F}$):

$$(p_1 \land \ldots \land p_n) \to \mathbf{F}$$

ou se os p_i não existem:

$$\mathbf{V} \to p$$

Fórmulas de Horn

Nem todas as fórmulas têm uma fórmula de Horn equivalente!

Mas,

Para determinar se uma fórmula de Horn da lógica proposicional é **satisfazível** podemos usar um algoritmo eficiente.

Satisfazibilidade duma fórmula de Horn

Considera a fórmula $p \wedge \neg q \wedge (q \vee \neg p)$:

- começar por colocar numa linha as variáveis proposicionais que ocorrem na fórmula e colocar a fórmula. Ex:

p	q	$p \wedge \neg q \wedge (q \vee \neg p)$

- se alguma das variáveis proposicionais é um dos elementos da conjunção atribuir o valor **V** a essa variável . Ex:

p	q	$p \wedge \neg q \wedge (q \vee \neg p)$
V		

Satisfazibilidade duma fórmula de Horn

- Com essa informação preencher a tabela como se tivesse a construir a tabela de verdade (para essa linha), analisando cada disjunção para determinar se, para ela ser verdadeira, se pode determinar mais valores para as variáveis proposicionais:

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$p)$
V									**F**	

- Neste caso, q tem de ser **V** e então isso pode ser acrescentado:

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$p)$
V	**V**								**F**	

Satisfazibilidade duma fórmula de Horn

- E voltando a repetir este passo, obtém-se:

p	q	p	$\wedge$	$\neg$	q	$\wedge$	$(q$	$\vee$	$\neg$	$p)$
V	**V**			**F**					**F**	

  Continuar até mais nada puder ser acrescentado.

- se no passo anterior se atribuir **F** a um dos elementos da conjunção, a fórmula também fica com o valor **F** e não é satisfazível. Caso contrário podemos atribuir à fórmula o valor **V** se atribuirmos **F** às restantes variáveis proposicionais.

No exemplo que estamos a considerar, a fórmula tem o valor **F** e portanto não é satisfazível.

Fórmulas de Horn para LPO

Uma cláusula é uma fórmula de Horn se tem no máximo um literal positivo.

Uma cláusula de Horn é positiva se tem um literal positivo:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_s (\alpha_1 \lor \neg\beta_1 \lor \ldots \lor \neg\beta_n)$$
$$\alpha_1 \leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$$

α_1 é a a cabeça da cláusula e $\beta_1, \ldots, \beta_n$ o corpo da cláusula. Se o corpo é vazio a cláusula diz-se unitária.

Uma cláusula de Horn é negativa (objectivo) se não tem literal positivo:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_s (\neg\beta_1 \lor \ldots \lor \neg\beta_n)$$
$$\neg\exists x_1 \ldots \exists x_s (\beta_1 \land \ldots \land \beta_n)$$
$$\leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$$

A cláusula vazia representa-se por ϵ ou [] corresponde a uma contradição (**F**) e é uma cláusula sem cabeça nem corpo.

Fórmulas de Horn

Exemplo 23.1. *Das seguintes fórmulas, indica quais são cláusulas de Horn, positivas ou negativas e escreve-as na notação clausal:*

- $\forall x \forall y \forall z (P(x,z) \lor Q(x,y) \lor \neg Q(x,z))$ *Não Horn* $P(x,z), Q(x,y) \leftarrow Q(x,z)$
- $\forall x \forall y \forall z (P(x,z) \lor \neg Q(x,y) \lor \neg Q(x,z))$*positiva*$P(x,z) \leftarrow Q(x,y), Q(x,z)$
- $\forall x \forall z P(x,z)$*unitária*$P(x,z) \leftarrow$
- $\forall x \forall y \forall z (\neg P(x,z) \lor \neg Q(x,y))$*negativa* $\leftarrow P(x,z), Q(x,y)$

Programa definido

Um programa definido é um conjunto finito de cláusulas de Horn positivas.

Num programa o conjunto de cláusulas com cabeças com mesmo símbolo de predicado P, chama-se a definição de P.

Exemplo 23.2. *Considera a linguagem de* $1^{\underline{a}}$ *ordem* $\mathcal{L}_{ss}$ *sem igualdade com* $\mathcal{F}_0 = \{\mathsf{0}, \mathsf{nil}\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\mathsf{s}\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\mathsf{cons}\}$, $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{sorted}\}$, $\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{slowsort}, \mathsf{perm}, \mathsf{less\_eq}\}$ *e* $\mathcal{R}_3 = \{\mathsf{delete}\}$.

O programa seguinte dada uma sequência de inteiros permuta os seus elementos até estarem ordenados!:

$\mathsf{slowsort}(\mathsf{x}, \mathsf{y}) \leftarrow \mathsf{sorted}(\mathsf{y}), \mathsf{perm}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$
$\mathsf{sorted}(\mathsf{nil}) \leftarrow$
$\mathsf{sorted}(\mathsf{cons}(\mathsf{x}, \mathsf{nil})) \leftarrow$
$\mathsf{sorted}(\mathsf{cons}(\mathsf{x}, \mathsf{cons}(\mathsf{y}, \mathsf{z}))) \leftarrow \mathsf{less\_eq}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{sorted}(\mathsf{cons}(\mathsf{y}, \mathsf{z}))$
$\mathsf{perm}(\mathsf{nil}, \mathsf{nil}) \leftarrow$
$\mathsf{perm}(\mathsf{cons}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{cons}(\mathsf{u}, \mathsf{v})) \leftarrow \mathsf{delete}(\mathsf{u}, \mathsf{cons}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{z}), \mathsf{perm}(\mathsf{z}, \mathsf{v})$

$\mathsf{delete}(\mathsf{x}, \mathsf{cons}(\mathsf{x}, \mathsf{y}), \mathsf{y}) \leftarrow$
$\mathsf{delete}(\mathsf{x}, \mathsf{cons}(\mathsf{y}, \mathsf{z}), \mathsf{cons}(\mathsf{y}, \mathsf{w})) \leftarrow \mathsf{delete}(\mathsf{x}, \mathsf{z}, \mathsf{w})$
$\mathsf{less\_eq}(\mathsf{0}, \mathsf{x})$
$\mathsf{less\_eq}(\mathsf{s}(\mathsf{x}), \mathsf{s}(\mathsf{y})) \leftarrow \mathsf{less\_eq}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$

- um inteiro n é representado pelo termo $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\ldots\mathsf{s}(\mathsf{0})))$ com n símbolos funcionais s. Ex: $\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})))$ representa $\mathsf{3}$
- uma lista de inteiros é representada por termos $\mathsf{cons}(\mathsf{x}, \mathsf{y})$ onde x é um inteiro e y é uma lista. A lista vazia é representada por nil Ex: $\mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0})), \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathsf{0}), \mathsf{cons}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{0}))), \mathsf{nil})$ representa a lista $[2, 1, 3]$
- $\mathsf{slowsort}$ dada uma lista x, verifica se está ordenada (sorted), senão permuta (perm)...

Proposição 23.1. *Seja* $\mathcal{P}$ *um programa,* $\leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$ *um objectivo e* $y_1, \ldots, y_r$ *as variáveis que ocorrem nos* β_i, $1 \leq i \leq n$. *Então*

$$\mathcal{P} \models \exists y_1 \ldots \exists y_r \beta_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \beta_n$$

se e só se $\mathcal{P} \cup \{\leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n\}$ *é não satisfazível.*

Demonstração. Directamente das definições. □

Exemplo 23.3. $P \cup \{\leftarrow slowsort(cons(s(s(0)), cons(s(0), cons(s(s(s(0))), nil), y)\}$ *não é satisfazível. Ou seja executa* P *com o objectivo*

$$\leftarrow slowsort(cons(s(s(0)), cons(s(0), cons(s(s(s(0))), nil), y)$$

e obtém em y *a resposta.*

1.2 Satisfazibilidade de Cláusulas

Satisfazibilidade de Cláusulas

Para um conjunto de fórmulas φ não ser satisfazível é necessário que nenhuma estrutura de $\mathcal{L}$ seja modelo de φ. Mas:

- se as fórmulas forem cláusulas basta mostrar que não têm um modelo de um dado tipo: um modelo de Herbrand.
- Um conjunto de claúsulas de Horn, são satisfazíveis se o forem no seu modelo mínimo de Herbrand.
- Dado um programa definido P e um objectivo G, $P \cup G$ é não satisfazível se e só se G não é satisfazível no modelo mínimo de P.

Satisfazibilidade de Cláusulas

Proposição 23.2. *Seja $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ uma estrutura de $\mathcal{L}$ e φ a cláusula*

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n,$$

com variáveis $x_1, \ldots x_s$.
$\mathcal{A}$ satisfaz φ, $\mathcal{A} \models \varphi$, se e só se para todos os $a_1, \ldots, a_s \in A$ existe um literal $\lambda \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \neg\beta_1, \ldots, \neg\beta_n\}$ tal que

$$A \models_s \lambda$$

para $s(x_i) = a_i$, $1 \leq i \leq s$.

Demonstração. Resulta directamente da definição de cláusula e da relação $\models_s$. □

Estrutura de Herbrand

Uma estrutura $\mathcal{A} = (A, \cdot^{\mathcal{A}})$ de $\mathcal{L}$ é estrutura de Herbrand se:

- $A = \mathcal{T}_0$, o conjunto de termos fechados de $\mathcal{L}$
- $c^{\mathcal{A}} = c$, para $c \in \mathcal{F}_0$
- $f^{\mathcal{A}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$, para $f \in \mathcal{F}_n$, $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_0$

Todas as estruturas de Herbrand têm o mesmo domínio (ou universo) e coincidem no valor dos símbolos funcionais: apenas diferem no valor dos símbolos de predicado.

Estruturas de Herbrand

Exemplo 23.4. *Para a linguagem $\mathcal{L}_{ss}$ (do* slowsort*) o domínio (ou universo) de qualquer estrutura de Herbrand $\mathcal{A}$ é:*

$$A = \{\mathit{0,nil,s(0),s(nil),cons(0,0),cons(0,nil),cons(nil,0),cons(nil,nil)},\ldots\}$$

e $\mathsf{0}^{\mathcal{A}} = \mathsf{0}$, $\mathsf{nil}^{\mathcal{A}} = \mathsf{nil}$, $\mathsf{s}^{\mathcal{A}}(\mathsf{0}) = \mathsf{s}(\mathsf{0})$, *etc*

Estruturas de Herbrand

Exemplo 23.5. *Seja a linguagem $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{F}_1 = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}\}$, $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{p}, \mathsf{r}\}$ e $\mathcal{R}_2 = \{\mathsf{q}\}$. Como $\mathcal{L}$ não tem constantes adicionamos uma constante c a $\mathcal{T}_0$ de $\mathcal{L}$. O universo de Herbrand é:*

$$A = \{\mathit{c,f(c),g(c),f(f(c)),f(g(c)),g(f(c)),g(g(c))},\ldots\}$$

e $\mathsf{c}^{\mathcal{A}} = \mathsf{c}$, $\mathsf{f}^{\mathcal{A}}(\mathsf{c}) = \mathsf{f}(\mathsf{c})$, $\mathsf{f}^{\mathcal{A}}(\mathsf{g}(\mathsf{c})) = \mathsf{f}(\mathsf{g}(\mathsf{c}))$, *etc*

Teorema de Herbrand

Teorema 23.1. *Seja φ um conjunto de cláusulas. Então φ é satisfazível se e só se tiver um modelo de Herbrand.*

Dem.

($\Leftarrow$) É óbvio que se φ tiver um modelo de Herbrand é satisfazível

Teorema de Herbrand

Dem.

($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{A}$ um modelo de φ. É necessário mostrar que φ tem um modelo de Herbrand, $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$: associamos a cada símbolo relacional R a relação:

$$R^{\mathcal{A}_{\mathcal{H}}} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_0^n \mid (t_1^{\mathcal{A}}, \ldots, t_n^{\mathcal{A}}) \in R^{\mathcal{A}}\}$$

Vejamos que $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ é um modelo de φ: seja $\forall(\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m) \in \varphi$.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \models \forall(\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m)$$

sse para toda a interpretação das variáveis $s_{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ se tem

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \models_{s_{\mathcal{H}}} (\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m)$$

Teorema de Herbrand

Dem.

Se $s_{\mathcal{H}}(x) = t \in \mathcal{T}_0$ seja $s(x) = t^{\mathcal{A}}$ em $\mathcal{A}$.

Como $\mathcal{A} \models \forall(\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m)$, então $\mathcal{A} \models_s (\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m)$, isto é, existe pelo menos um k tal que $\mathcal{A} \models_s \lambda_k$.

Mas, por construção de $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$e como cada λ_i é um literal,

$$\mathcal{A} \models_s \lambda_i \text{ sse } \mathcal{A}_{\mathcal{H}} \models_{s_{\mathcal{H}}} \lambda_i,$$

, $1 \leq i \leq m$ (verifica!). Donde

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} \models_{s_{\mathcal{H}}} (\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m) \text{ sse } \mathcal{A} \models_s (\lambda_1 \lor \ldots \lor \lambda_m)$$

.

Corolário 23.1. *Um conjunto de cláusulas de Horn é satisfazível sse tiver um modelo de Herbrand.*

Nota que se φ não fosse um conjunto de cláusulas o teorema não se verificava.

Exemplo 23.6. *O conjunto de proposições* $\{\mathsf{P}(\mathsf{c}), \exists x \neg \mathsf{P}(x)\}$ *da linguagem com* $\mathcal{F}_0 = \{\mathsf{c}\}$ *e* $\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{P}\}$ *é satisfazível mas não tem modelo de Herbrand:*

$\mathcal{A} = (\{0,1\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ *com* $\mathsf{c}^{\mathcal{A}} = 0$ *e* $\mathsf{P}^{\mathcal{A}} = \{0\}$ *satisfaz o conjunto. Mas* $\mathcal{T}_0 = \{\mathsf{c}\}$ *e as únicas estruturas de Herbrand são tais que* $\mathsf{P}^{\mathcal{H}_1} = \emptyset$ *e* $\mathsf{P}^{\mathcal{H}_2} = \{\mathsf{c}\}$*, e nenhuma satisfaz o conjunto.*

1.3 Modelo Mínimo de Herbrand

Modelo mínimo de Herbrand

Dado um conjunto de cláusulas de Horn φ, o modelo mínimo de Herbrand de φ é a estrutura de Herbrand $\mathcal{A}_\varphi$ tal que, para $R \in \mathcal{R}_n$:

$$R^{\mathcal{A}_\varphi} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_0^n \mid \varphi \vdash R(t_1, \ldots, t_n)\}$$

Teorema 23.2. *Seja φ um conjunto satisfazível de cláusulas de Horn. Então:*

- $\mathcal{A}_\varphi \models \varphi$
- *se $\mathcal{A}_{\mathcal{H}}$ é um modelo de Herbrand de φ, então para todo o símbolo relacional n-ário R, $R^{\mathcal{A}_\varphi} \subseteq R^{\mathcal{A}_{\mathcal{H}}}$*

Teorema 23.3. *Seja φ um conjunto de cláusulas de Horn. Para qualquer fórmula fechada da forma*

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\alpha_0 \land \ldots \land \alpha_l),$$

onde cada α_i é uma fórmula atómica, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\varphi \vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n(\alpha_0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \alpha_l)$
2. $\mathcal{A}_\varphi \models \exists x_1 \ldots \exists x_n(\alpha_0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \alpha_l)$
3. *existem* $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_0$*, tal que* $\varphi \vdash (\alpha_0 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \alpha_l)[t^n/x^n]$

Resolução para cláusulas de Horn

Seja $\mathcal{P}$ um programa (conjunto de cláusulas de Horn positivas) e G uma cláusula negativa (objectivo),

$$\leftarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$$

$(= \forall \neg\beta_1 \vee \cdots \neg \vee \beta_n)$.

Temos que

$$\mathcal{P} \models \exists \beta_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \beta_n \text{ sse } \not\models P \ \wedge \ G$$

Sendo a resolução integra, basta que

$$\mathcal{P} \cup \{G\} \vdash \mathbf{F}.$$

Mas então

$$\mathcal{P} \models (\beta_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ \beta_n)\theta$$

para alguma substituição θ.

Mais especificamente:

Resposta correcta

Uma substituição de variáveis θ em G é uma resposta correcta se $\mathcal{P} \models \forall(\neg G\theta)$ onde $\forall$ é o fecho universal das variáveis livres em $\neg G\theta$.