Verificação de Dedutiva de Programas

1. Cálculos de correcção (Lógica de Hoare)
2. Pré-condições mais fracas e algoritmos de geração de condições de verificação.
3. Geração de obrigações de prova
4. Ferramentas para a especificação, verificação e certificação de programas imperativos.

Origens

Lógica de Hoare é a base das técnicas de verificação dedutiva de programas (1969, *An Axiomatic base for Computer Programming*)

Tony Hoare

Inventor também do Quick Sort (em 1960, com apenas 26 anos), 1980 recebeu

um Turing award. Comemorou os 85 anos no Porto, FM'19.

Robert Floyd

Algumas ideias introduzidas em 1967 em *Assigning Meaning to Programs.*

Verificação Automática de Programas

Consideremos o seguinte programa para calcular $\sum_{m=1}^{100} m$:

$x \leftarrow 0$;
$y \leftarrow 1$;
while $y! = 101$ **do**
    $x \leftarrow x + y$;
    $y \leftarrow y + 1$;

- Como podemos provar que este programa termina com $x = \sum_{m=1}^{100} m$.
- Correr o programa seguindo a sua semântica operacional é uma opção.

- Mas o que acontece se mudarmos a condição do `while`, para `y!=c`, para um determinado `c` inicializado no programa?
- Correr o programa, para sucessivos valores de `c` não é opção.

Verificação de Programas considerando Sistemas dedutivos

- Dado um programa e uma especificação, verificar se o primeiro satisfaz a segunda (sem executar o programa!!).
- Vamos considerar Lógicas de Floyd-Hoare (1970s) em que as especificações são baseadas em pré e pós-condições:

> Uma fórmula é uma asserção de que se uma pré-condição se verifica antes da execução do programa, então a pós-condição terá de se verificar após a sua execução.

Exemplo

$x \leftarrow 0$;
$y \leftarrow 1$;
Require: $\{x = 0 \wedge y = 1\}$
while $y! = 101$ **do**
$x \leftarrow x + y$;
$y \leftarrow y + 1$;
Ensure: $\{x = \sum_{n=0}^{100} n\}$

Uma linguagem imperativa simples - While

Categorias sintácticas

- **Num** inteiros, n
- **Bool** valores de verdade, `true` e `false`
- **Var** variáveis, x
- **Aexp** expressões aritméticas, E
- **Bexp** expressões Booleanas, B
- **Com** comandos, C

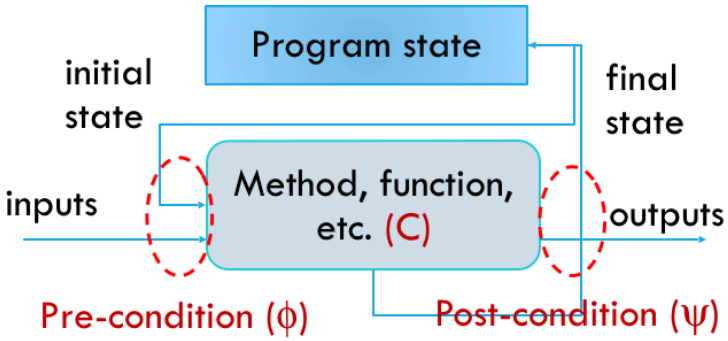
BNFs (básicas)

Para n em **Num** e x em **Var**

$$\begin{array}{lcl} E & ::= & n \mid x \mid E + E \mid E - E \mid E \times E \\ B & ::= & \mathsf{true} \mid \mathsf{false} \mid E = E \mid E < E \mid !B \mid B \ \wedge \ B \\ C & ::= & \texttt{skip} \mid x \leftarrow E \mid C \ ; \ C \mid \texttt{if}\ B\ \texttt{then}\ C\ \texttt{else}\ C \mid \texttt{while}\ B\ \texttt{do}\ C \end{array}$$

Informalmente a asserção é válida se:

> [¡+-¿]se φ se verifica no estado inicial se a execução de C termina num estado s' então ψ verifica-se no estado s'



Pré e Pos condições

Exemplos

$\{x = 1\}\mathtt{x} \leftarrow \mathtt{x} + \mathtt{1}\{x = 2\}$ esta asserção é verdadeira

$\{x = 1\}\mathtt{y} \leftarrow \mathtt{x}\{y = 1\}$ esta asserção é verdadeira

$\{x = 1\}\mathtt{y} \leftarrow \mathtt{x}\{y = 2\}$ esta asserção é falsa

$\{x = x_0 \ \wedge \ y = y_0\}\mathtt{r} \leftarrow \mathtt{x}\,;\mathtt{x} \leftarrow \mathtt{y}\,;\mathtt{y} \leftarrow \mathtt{r}\{x = y_0 \ \wedge \ y = x_0\}$

As variáveis x_0 e y_0 são chamadas variáveis lógicas.

$\{\mathsf{true}\}C\{\psi\}$ se C terminar ψ verifica-se

$\{\varphi\}C\{\mathsf{true}\}$ é sempre verdadeira para qualquer C e φ.

[fragile] Exemplo

- $x \leftarrow 0;$
  $y \leftarrow 1;$

Require: $\{x = 0 \wedge y = 1\}$
  while $y! = 101$ **do**
    $x \leftarrow x + y;$
    $y \leftarrow y + 1;$
Ensure: $\{x = \sum_{n=0}^{100} n\}$

- Pretende-se inferir que $x = \sum_{m=1}^{100} m$ sabendo que antes do ciclo `while` tínhamos $y = 0$ e $x = 1$.
- É fácil ver que no fim do ciclo $y = 101$, mas queremos o valor de x!
- Temos que construir um invariante do ciclo:

- No início de cada iteração temos que

$$x = 1 + 2 + 3 + \cdots + (y - 1)$$

.Linguagem das Condições Numa asserção, $\{\varphi\}C\{\psi\}$, φ, ψ são fórmulas $\varphi, \psi, \ldots$ duma linguagem de lógica de primeira ordem para a aritmética, ou seja:

- constantes 0 e 1 (os inteiros decimais são abreviaturas)
- com símbolos funcionais $-$,$+$, $-$ e $\times$ (para termos)
- com símbolos de predicado $<$, $=$ (para predicados)
- os habituais símbolos lógicos: operadores e quantificadores (onde os quantificadores só ligam as chamadas variáveis lógicas)

São interpretadas nos naturais numa estrutura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \cdot)$ e os estados s, correspondem a atribuições de valores às variáveis.

Se $\mathcal{N} \models_s \varphi$, dizemos que s satifaz φ, i.e., $s \models \varphi$.

Por exemplo, se $s(x) = -2$, $s(y) = 5$, $s(z) = -1$,

$s \models \neg(x + y < z)$ verifica-se

$s \models y - x \times z < z$ não se verifica

.Correcção parcial Um triplo $\{\varphi\}C\{\psi\}$ é satisfeito para a correcção parcial se para todos os estados que satisfazem φ, o estado que resulta de executar C satisfaz ψ, desde que C termine,

$$\models_{par} \{\varphi\}C\{\psi\}.$$

Nota que

while true **do**
  $x \leftarrow 0$;

satisfaz todas as asserções.

.Correcção total

Um triplo $\{\varphi\}C\{\psi\}$ é satisfeito para a correcção total se para todos os estados que satisfazem φ, é garantido que C termina e que o estado resultante satisfaz ψ,

$$\models_{tot} \{\varphi\}C\{\psi\}$$

Neste caso

while true **do**
  $x \leftarrow 0$;

não se verifica para nenhuma asserção.

Sistema dedutivo (*cálculo*) para a correcção parcial

- Um sistema dedutivo é constituído por um conjunto de axiomas e um conjunto de regras de inferência.
- Uma derivação (demonstração) é uma sequência finita de aplicações das regras e dos axiomas.
- Se uma asserção $\{\varphi\}C\{\psi\}$ for derivada pelo calculus de correcção parcial dizemos que
$$\vdash_{par} \varphi C\{\psi\}$$
é válido.
- O cálculo é integro se:
$$\vdash_{par} \{\varphi\}C\{\psi\} \text{ implica que } \models_{par} \{\varphi\}C\{\psi\}.$$

Sistema dedutivo para a correcção parcial

Lógica de Hoare

$[skip_p\ ]$

$$\{\varphi\}\,\texttt{skip}\,\{\varphi\}$$

$[ass_p\ ]$

$$\{\varphi[E/x]\}\,x \leftarrow E\,\{\varphi\}$$

$[comp_p\ ]$

$$\frac{\{\varphi\}\,C_1\,\{\eta\} \qquad \{\eta\}\,C_2\,\{\psi\}}{\{\varphi\}\,C_1; C_2\,\{\psi\}}$$

onde $\varphi[E/x]$ é a fórmula que se obtem substituindo x por E.

[shrink=.7]

Sistema dedutivo (*calculus*) para a correção parcial Lógica de Hoare (cont.)

$[if_p\ ]$

$$\frac{\{\varphi\ \wedge\ B\}\,C_1\,\{\psi\} \qquad \{\varphi\ \wedge\ \neg B\}\,C_2\,\{\psi\}}{\{\varphi\}\,\texttt{if}\,B\,\texttt{then}\,C_1\,\texttt{else}\,C_2\,\{\psi\}}$$

$[while_p\ ]$

$$\frac{\{\psi \ \wedge \ B\}\, C\, \{\psi\}}{\{\psi\}\, \texttt{while}\, B\, \texttt{do}\, C\, \{\psi \ \wedge \ \neg B\}}$$

A ψ chama-se o invariante de ciclo

$[cons_p\ ]$

$$\frac{\vdash \varphi' \to \varphi \quad \{\varphi\}\, C\, \{\psi\} \quad \vdash \psi \to \psi'}{\{\varphi'\}\, C\, \{\psi'\}}$$

Exemplos

Exemplo 2.1 *Mostrar que* $\vdash_{par} \{\mathsf{true}\} z \leftarrow x; z \leftarrow z + y; u \leftarrow z \{u = x + y\}$

$$\dfrac{\dfrac{\{x+y=x+y\}z \leftarrow x\{z+y=x+y\} \qquad \dfrac{\{z+y=x+y\}z \leftarrow z+y\{z=x+y\} \qquad \{z=x+y\}u \leftarrow z\{u=x+y\}}{\{z+y=x+y\}z \leftarrow z+y; u \leftarrow z\{u=x+y\}}\, comp_p}{\{x+y=x+y\}z \leftarrow x; z \leftarrow z+y; u \leftarrow z\{u=x+y\}}\, comp_p}{\{\mathsf{true}\}z \leftarrow x; z \leftarrow z+y; u \leftarrow z\{u=x+y\}}\, cons_p$$

Exemplos

Exercício 2.1 *Deduzir as seguintes asserções*

- $\{x = 1\}\mathtt{x} \leftarrow \mathtt{x} + \mathtt{1}\{x = 2\}$
- $\{x = 1\}\mathtt{y} \leftarrow \mathtt{x}\{y = 1\}$
- $\{x = x_0 \wedge y = y_0\}\mathtt{r} \leftarrow \mathtt{x}\,; \mathtt{x} \leftarrow \mathtt{y}\,; \mathtt{y} \leftarrow \mathtt{r}\{x = y_0 \wedge y = x_0\}$

$\diamond$

Cálculo para a correcção parcial - Exemplos

Exercício 2.2 *Mostrar que*

$$\vdash_p \{x \leftarrow r + (y \times q)\} r \leftarrow r - y; q \leftarrow q + 1\, \{x \leftarrow r + (y \times q)\}$$

$\diamond$

Exercício 2.3 *Mostrar que*

$$\vdash_p \{\mathsf{true}\} z \leftarrow x + 1;\ \mathtt{if}\ z - 1 = 0\, \mathtt{then}\, y \leftarrow 1\, \mathtt{else}\, y \leftarrow z \{y = x + 1\}$$

$\diamond$

`tableaux` para a correcção parcialSeja $C = C_1; C_2; \ldots; C_n$ e que queremos $\vdash_p \{\varphi\} C \{\psi\}$. Podemos considerar vários problemas da forma $\vdash_p \{\varphi_i\} C_i \{\varphi_{i+1}\}$. Para tal anotamos os comandos que constituem C com fórmulas φ_i e consideramos um `tableaux` de prova da forma:

$\{\varphi_0\}$
$C_1;$
$\{\varphi_1\}$ justificação
$C_2;$
$\vdots$
$\{\varphi_{n-1}\}$ justificação
$C_n;$
$\{\varphi_n\}$

Mostrar que $\vdash_p \{\varphi_i\}C_{i+1};\{\varphi_{i+1}\}$, começando por φ_n. Mas como obter cada φ_i?

Pré-condições mais fracas (wp)Pré-condições mais fracas, wp Para cada comando C e pós-condição ψ a fórmula $wp(C,\psi)$ é a pré-condição mais fraca que sendo verdade no estado s, garante que num estado s' obtido depois de C executar e se C terminar, a pós-condição ψ se verifica.

Isto é:

- $\models_p \{wp(C,\psi)\}C\{\psi\}$
- se $\models_p \{\varphi\}C\{\psi\}$ então $\varphi \rightarrow wp(C,\psi)$ (que é chamada condição de verificação)

[+-¿] `tableaux` para a correcção parcial

- A fórmula φ_i obtida a partir de C_{i+1} e φ_{i+1} é a pré-condição mais fraca de C_{i+1}
- dada a pós-condição φ_{i+1}, podemos escrever

$$wp(C_{i+1},\varphi_{i+1}) = \varphi_i.$$

- A partir das $wp()$ e usando a regra da consequência ($cons_p$) podemos gerar automaticamente condições de verificação,
- que poderão ser demonstradas automaticamente ou assistidas por um demonstrador de teoremas.
- De um modo geral se $\{\varphi\}C\{\psi\}$ a condição de verificação é:

$$\varphi \rightarrow wp(C,\psi)$$

[+-¿] *Pré-condições mais fracas - ass_p* Atribuição

$$\begin{array}{ll} \{\psi[E/x]\} & \\ x \leftarrow E & \\ \{\psi\} & ass_p \end{array}$$

A condição de verificação para $\{\varphi\}x \leftarrow E\{\psi\}$, seria

$$\varphi \rightarrow \psi[E/x]$$

Exemplo 2.2 *Calcular*

1. $wp(x \leftarrow 0, x = 0)$ *é* $x = 0$
2. $wp(x \leftarrow x + 1, x > 0)$ *é* $x + 1 > 0$

Pré-condições mais fracas Consequência

A regra $cons_p$ pode-se aplicar quando $\varphi' \rightarrow \varphi$ e temos $\{\varphi\}\, C\, \{\psi\}$. Então neste caso admite-se no *tableaux* duas fórmulas seguidas: φ' e por baixo φ.

$$\begin{array}{ll} \{\varphi'\} & \\ \{\varphi\} & cons_p \end{array}$$

Exercício 2.4 *Mostrar com um* tableaux $\vdash_p \{y = 5\}x \leftarrow y + 1\{x = 6\}$. $\diamond$

[shrink=0.8] *Pré-condições mais fracas - if_p*Condicional Queremos determinar φ tal que $wp(\texttt{if}\, B\, \texttt{then}\, C_1\, \texttt{else}\, C_2, \psi) = \varphi$.

$$\begin{array}{ll} \{(B \rightarrow \varphi_1) \wedge (\neg B \rightarrow \varphi_2)\} & \\ \texttt{if}\, B\, \texttt{then} & \\ \quad \{\varphi_1\} & \\ \quad C_1 & \\ \quad \{\psi\} & if_p \\ \texttt{else} & \\ \quad \{\varphi_2\} & \\ \quad C_2 & \\ \quad \{\psi\} & \\ \{\psi\} & if_p \end{array}$$

Podemos calcular $\{\varphi_1\}C_1\{\psi\}$ e $\{\varphi_2\}C_2\{\psi\}$, e então $\varphi \equiv (B \rightarrow \varphi_1) \wedge (\neg B \rightarrow \varphi_2)$

*Pré-condições mais fracas - if_p*As condições de verificação seriam as geradas por $\{\varphi_1 \wedge B\}C_1\{\psi\}$ e por $\{\varphi_2 \wedge \neg B\}C_2\{\psi\}$.

Exemplo 2.3 *Mostrar com um* tableaux

$$
\begin{array}{l}
\vdash_p \{\mathsf{true}\} \\
a \leftarrow x + 1; \\
\mathtt{if}\, a - 1 = 0\, \mathtt{then} \\
y \leftarrow 1 \\
\mathtt{else} \\
y \leftarrow a \\
\{y = x + 1\}
\end{array}
$$

[shrink=0.8]

$\{\mathsf{true}\}$
$\{(x = 0 \to 1 = 1) \ \wedge \ (\neg(x = 0) \to x + 1 = x + 1)\}$ $cons_p$
$\{(x + 1 - 1 = 0 \to 1 = x + 1) \ \wedge \ (\neg(x + 1 - 1 = 0) \to x + 1 = x + 1)\}$ $cons_p$
$a \leftarrow x + 1$
$\{(a - 1 = 0 \to 1 = x + 1) \ \wedge \ (\neg(a - 1 = 0) \to a = x + 1)\}$ ass_p
$\mathtt{if}\, a - 1 = 0\, \mathtt{then}$
$\{1 = x + 1\}$ if'_p
$y \leftarrow 1$
$\{y = x + 1\}$ ass_p
$\mathtt{else}$
$\{a = x + 1\}$ if'_p
$y \leftarrow a$
$\{y = x + 1\}$ ass_p

*Pré-condições mais fracas - if_p*Neste caso a regra de inferência usada é:

$[if'_p\ ]$

$$
\frac{\{\varphi_1\}\, C_1\, \{\psi\} \qquad \{\varphi_2\}\, C_2\, \{\psi\}}{\{(B \to \varphi_1) \ \wedge \ (\neg B \to \varphi_2)\}\, \mathtt{if}\, B\, \mathtt{then}\, C_1\, \mathtt{else}\, C_2\, \{\psi\}}
$$

Exercício 2.5 *Mostra que esta regra se pode deduzir do sistema de inferência dado.* $\diamond$

*Pré-condições mais fracas - $while_p$*Queremos $\vdash_p \{\varphi\}\mathtt{while}\, B\, \mathtt{do}\, C\, \{\psi\}$.

É necessário uma fórmula η tal que:

- $\varphi \to \eta$
- $\eta \ \wedge \ \neg B \to \psi$ e
- $\vdash_p \{\eta\}\mathtt{while}\, B\, \mathtt{do}\, C\{\eta \ \wedge \ \neg B\}$

Invariante

Um invariante do ciclo $\texttt{while}\, B\, \texttt{do}\, C$ é uma fórmula η tal que

$$\models_p \{\eta \wedge B\} C \{\eta\}.$$

Pré-condições mais fracas - $while_p$

$$\begin{array}{lll}
\{\varphi\} & & \\
\{\eta\} & & \\
\texttt{while}\, B\, \texttt{do} & & \\
\quad \{\eta \wedge B\} & & \\
\quad C & & \\
\quad \{\eta\} & & \\
\{\eta \wedge \neg B\} & & while_p \\
\{\psi\} & cons_p &
\end{array}$$

Dado η, as condições de verificação são $\varphi \to \eta$,$\eta \wedge \neg B \to \psi$ e as condicões de verificação de $\{\eta \wedge B\} C \{\eta\}$.

Pré-condições mais fracas - $while_p$

Exemplo 2.4 *Mostrar que*

$$\vdash_p \{\texttt{true}\} y \leftarrow 1; z \leftarrow 0; \texttt{while}\ z \,!= x\ do\ (z \leftarrow z+1; y \leftarrow y \times z) \{y = x!\}$$

O invariante I a considerar é : $y = z!$ e verifica as condições necessárias:

1. É implicado pela pré-condição do `while` que é $y = 1 \wedge z = 0$:
   $y = 1 \wedge z = 0 \to y = z!$
2. $y = z! \wedge z = x \to y = x!$

Começamos com I dentro do ciclo até obter I' e mostramos que $I \wedge B \to I'$.

Pré-condições mais fracas - $while_p$

$y \leftarrow 1$
$z \leftarrow 0$
$\{y = z!\}$?
`while` $\neg z = x$ `do`
$\{y = z! \ \wedge \ \neg z = x\}$
$\{y \times (z+1) = (z+1)!\}$ $cons_p$
$z = z + 1$
$\{y \times z = z!\}$ ass_p
$y = y \times z$
$\{y = z!\}$ ass_p
$\{y = x!\}$?

porque $(y = z! \ \wedge \ \neg z = x) \rightarrow y = z! \rightarrow y \times (z+1) = (z+1)!$ [shrink=0.8]

Pré-condições mais fracas - $while_p$

$\{\mathsf{true}\}$
$\{1 = 0!\}$ $cons_p$
$y \leftarrow 1$
$\{y = 0!\}$ ass_p
$z \leftarrow 0$
$\{y = z!\}$ ass_p
`while` $\neg z = x$ `do`
$\{y = z! \ \wedge \ \neg z = x\}$
$\{y \times (z+1) = (z+1)!\}$ $cons_p$
$z \leftarrow z + 1$
$\{y \times z = z!\}$ ass_p
$y \leftarrow y \times z$
$\{y = z!\}$ ass_p
$\{y = z! \ \wedge \ z = x\}$ $while_p$
$\{y = x!\}$ $cons_p$

Exemplo

Exercício 2.6 *Mostrar que*

$$\begin{aligned} &\vdash_p \{\mathsf{true}\} \\ &r \leftarrow x; q \leftarrow 0; \\ &\texttt{while}\, y \leq r\, \texttt{do} \\ &\quad r \leftarrow r - y; \\ &\quad q \leftarrow q + 1 \\ &\{r < y \ \wedge \ x = r + (y \times q)\} \end{aligned}$$

$\diamond$

A expressão $x = r + (y \times q)$ é um invariante de ciclo.

.Exemplo

Exercício 2.7 *Mostra que*

$\{x \geq 0\} z \leftarrow x; y \leftarrow 0;\ \texttt{while}\ \neg z = 0\ \texttt{do}\ (y \leftarrow y + 1; z \leftarrow z - 1) \{x = y\}$.

$\diamond$