Programação Funcional
5ª Aula — Definições recursivas

Pedro Vasconcelos
DCC/FCUP

2014

Definições usando outras funções

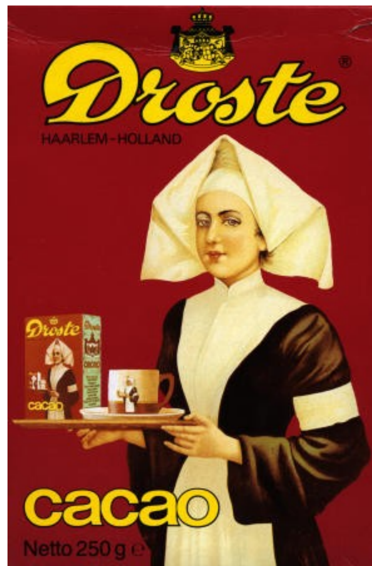
Podemos definir funções usando outras previamente definidas (e.g. do prelúdio-padrão).

Exemplo:

```
factorial :: Int -> Int
factorial n = product [1..n]
```

Definições recursivas

Também podemos definir uma função por recorrência, i.e. usando a própria função que estamos a definir; tais definições dizem-se recursivas.



Definições recursivas (cont.)

Exemplo:

```
factorial :: Int -> Int
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

Exemplo de redução

```
  factorial 3
=
  3 * factorial 2
=
  3 * (2 * factorial 1)
=
  3 * (2 * (1 * factorial 0))
=
  3 * (2 * (1 * 1))
=
  6
```

Observações

- A primeira equação define o factorial de zero.
- A segunda equação define o factorial de n usando factorial de $n - 1$.
- Logo: o factorial fica definido apenas para inteiros não-negativos.

```
> factorial (-1)
^C
Interrupted
```

Não termina!

Alternativas

Duas equações sem guardas:

```
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

Uma equação com guardas:

```
factorial n | n==0      = 1
            | otherwise = n*factorial (n-1)
```

Uma equação com uma condição:

```
factorial n = if n==0 then 1 else n*factorial (n-1)
```

Porquê recursão?

- Exprimir a a solução dum problema usando problemas semelhantes mas de menor tamanho.
- Modelo universal de computação: qualquer algoritmo pode ser escrito usando funções recursivas.
- Podemos demonstrar propriedades de funções recursivas usando indução matemática.

Recursão sobre listas

Também podemos definir funções recursivas sobre listas.

Exemplo: a função que calcula o produto de uma lista de números (do prelúdio-padrão).

```
product []       = 1
product (x:xs) = x*product xs
```

Exemplo de redução

```
  product [2,3,4]
=
  2 * product [3,4]
=
  2 * (3 * product [4])
=
  2 * (3 * (4 * product []))
=
  2 * (3 * (4 * 1))
=
  24
```

A função *length*

O comprimento duma lista também pode ser definido por recursão.

```
length :: [a] -> Int
length []     = 0
length (_:xs) = 1 + length xs
```

A função *length* (cont.)

Exemplo de redução:

```
  length [1,2,3]
=
  1 + length [2,3]
=
  1 + (1 + length [3])
=
  1 + (1 + (1 + length []))
=
  1 + (1 + (1 + 0))
=
  3
```

A função *reverse*

A função *reverse* (que inverte a ordem dos elementos numa lista) também pode ser definida recursivamente.

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []     = []
reverse (x:xs) = reverse xs ++ [x]
```

A função *reverse* (cont.)

Exemplo de redução:

```
  reverse [1,2,3]
=
  reverse [2,3] ++ [1]
=
  (reverse [3] ++ [2]) ++ [1]
=
  ((reverse [] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
=
  (([] ++ [3]) ++ [2]) ++ [1]
=
  [3,2,1]
```

Funções com múltiplos argumentos

Também podemos definir recursivamente funções com múltiplos argumentos.

Por exemplo: a concatenação de listas.

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]     ++ ys = ys
(x:xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

Funções com múltiplos argumentos (cont.)

A função *zip* que constroi a lista dos pares de elementos de duas listas.

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a,b)]
zip []     _      = []
zip _      []     = []
zip (x:xs) (y:ys) = (x,y) : zip xs ys
```

Funções com múltiplos argumentos (cont.)

A função *drop* que remove um prefixo de uma lista.

```
drop :: Int -> [a] -> [a]
drop 0 xs              = xs
drop n []              = []
drop n (x:xs) | n>0 = drop (n-1) xs
```

Recursão mútua

Podemos também definir duas ou mais funções que dependem mutamente umas das outras.

Exemplo: testar se um natural é par ou impar.[1]

```
par :: Int -> Bool
par 0       = True
par n | n>0 = impar (n-1)

impar :: Int -> Bool
impar 0       = False
impar n | n>0 = par (n-1)
```

[1] De forma ineficiente.

Quicksort

O algoritmo *Quicksort* para ordenação de uma lista pode ser especificado de forma recursiva:

se a lista é vazia
: então já está ordenada;

se a lista não é vazia
: seja *x* o primeiro valor e *xs* os restantes:

1. recursivamente ordenamos os valores de *xs* que são menores ou iguais a *x*;
2. recursivamente ordenamos os valores de *xs* que são maiores do que *x*;
3. concatenamos os resultados com *x* no meio.

Quicksort (cont.)

Em Haskell:

```
qsort :: [Int] -> [Int]
qsort []     = []
qsort (x:xs) = qsort menores ++ [x] ++ qsort maiores
    where menores = [x' | x'<-xs, x'<=x]
          maiores = [x' | x'<-xs, x'>x]
```

Esta é provavelmente a implementação mais concisa do algoritmo *Quicksort* em *qualquer* linguagem de programação!

Quicksort (cont.)

Exemplo de execução (abreviando `qsort` para `qs`):

```
  qs [3,2,4,1,5]
=
  qs [2,1] ++ [3] ++ qs [4,5]
=
  (qs [1]++[2]++qs []) ++ [3] ++ (qs []++[4]++qs [5])
=
  ([1]++[2]++[]) ++ [3] ++ ([]++[4]++[5])
=
  [1,2,3,4,5]
```

Como escrever definições recursivas

1. Definir o tipo da função
2. Enumerar os casos a considerar usando equações com padrões
3. Definir o valor nos casos simples
4. Definir o valor nos outros casos assumindo que a função está definida para valores de tamanho inferior
5. Generalizar e simplificar

Exemplo

Escrever uma definição recursiva da função *init* que remove o último elemento duma lista.

```
> init [1,2,3,4,5]
[1,2,3,4]

> init [1]
[]

> init []
*** Exception: Prelude.init: empty list
```

Exemplo (cont.)

Passo 1: o tipo da função é

```
init :: [a] -> [a]
```

Exemplo (cont.)

Passo 2: enumerar os casos.

```
init :: [a] -> [a]
init (x:xs) =
```

Notar que *init* não está definido para a lista vazia.

Exemplo (cont.)

Passo 3: definir o caso simples.

```
init :: [a] -> [a]
init (x:xs) | null xs    = []
            | otherwise =
```

Notar que se *xs* é a lista vazia então a lista $(x : xs)$ tem um só elemento.

Exemplo (cont.)

Passo 4: definir o caso recursivo.

```
init :: [a] -> [a]
init (x:xs) | null xs   = []
            | otherwise = x : init xs
```

Notar que *xs* é uma sub-lista de $(x : xs)$, logo tem comprimento menor.

Exemplo (cont.)

Passo 5: simplificação.

```
init :: [a] -> [a]
init [x]     = []
init (x:xs) = x : init xs
```

Podemos separar o caso da lista com um só elemento numa equação e assim eliminar as guardas.