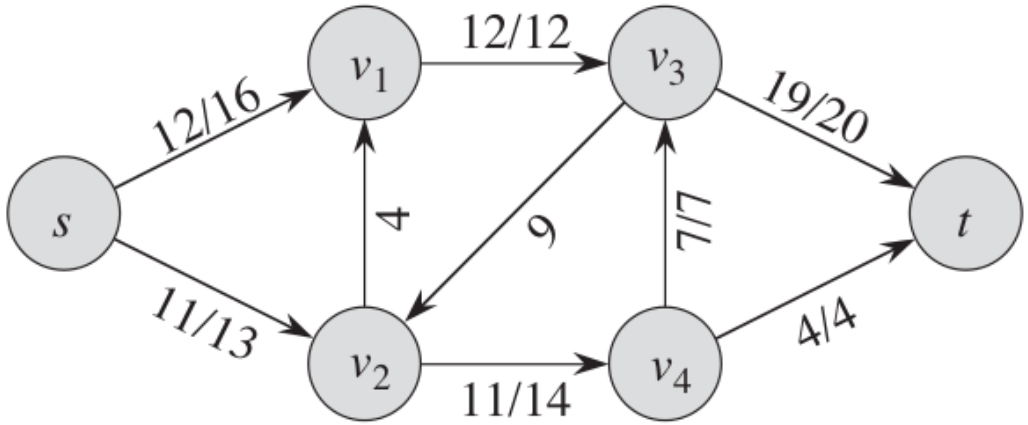
Fluxo Máximo

Pedro Ribeiro

DCC/FCUP

2020/2021

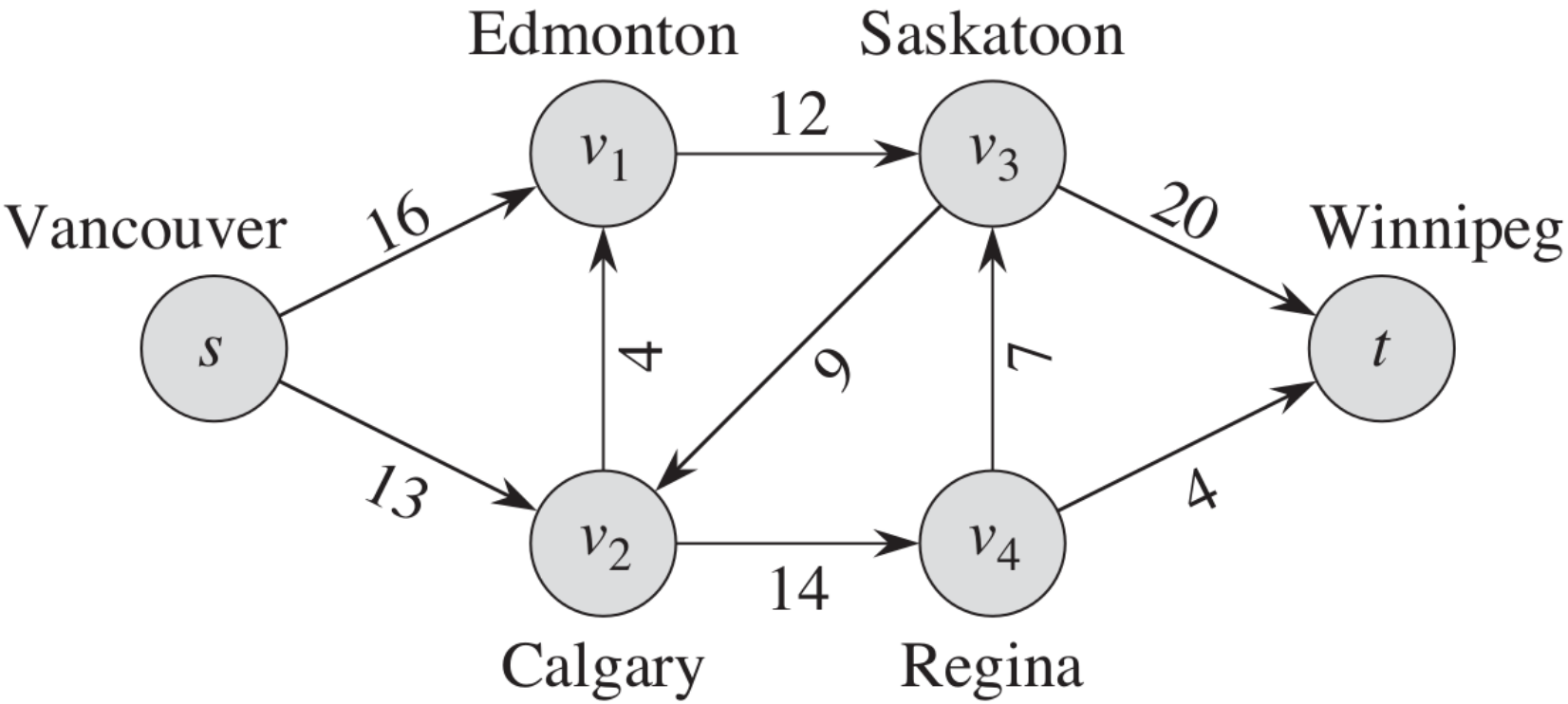


Fluxo Máximo

- Um grafo pesado pode ser interpretado como uma **rede de canalizações** onde o peso é a **capacidade** de cada canalização.
- Calcular o **fluxo máximo** implica descobrir qual o fluxo máximo que pode ser enviado de um nó s (*source*) para um nó t (*sink*).
  - Imagine água a circular nos canos e o que quer é maximizar o volume de água a circular entre s e t
- Mais formalmente, sendo $f(u, v)$ o fluxo na aresta (u, v), e $c(u, v)$ a sua capacidade, temos de obedecer às seguintes **restrições**:
  - **Capacidades**: $0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$ para qualquer (u, v)
    (O fluxo não é negativo e tem de ser menor ou igual à capacidade)
  - **Conservação de Fluxo**: Para cada $u \in V - \{s, t\}$, $\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$
    (Em cada nó que não a origem e o destino, a soma do fluxo que entra é igual à soma do fluxo que sai)
  - **Máximo Fluxo**: Queremos maximizar $|f|$, onde $|f| = \sum_{v \in V} f(s, v) - \sum_{v \in V} f(v, s)$
    (Fluxo total é o que sai da origem menos o que entra na origem)

Fluxo Máximo

- Vejamos um exemplo. Imagine a seguinte rede:

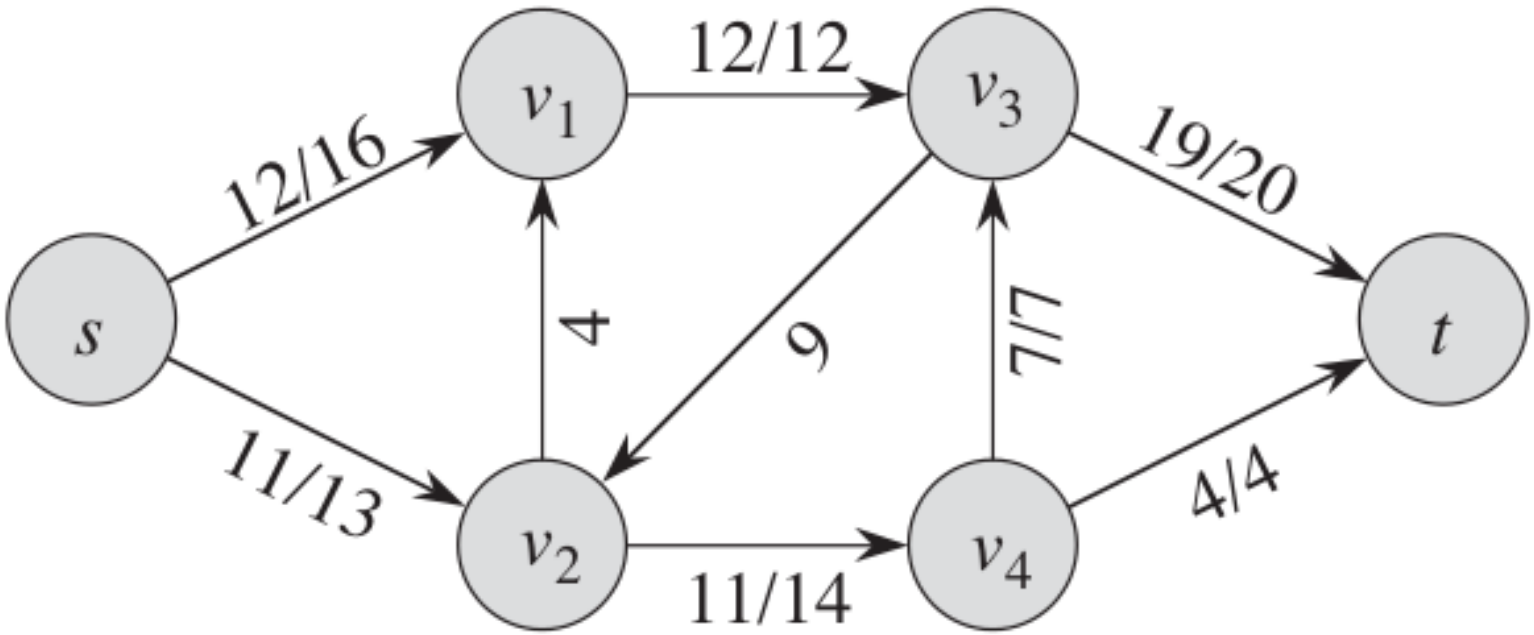


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Qual o **fluxo máximo** entre *Vancouver* e *Winnipeg* ?

Fluxo Máximo

- O fluxo máximo seria **23** e podia ser obtido da seguinte maneira: (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)



(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

Note que 23 é a soma do fluxo que sai da origem (12 através da aresta (s, v_1) e 11 através da aresta (s, v_2)

Algoritmos para Fluxo Máximo - Ford-Fulkerson

- Dada uma **rede de fluxos** como calcular o seu fluxo máximo?
- Uma hipótese é usar o **método de Ford-Fulkerson**
  (chamamos de método porque é uma ideia que pode ser concretizada depois com vários algoritmos)

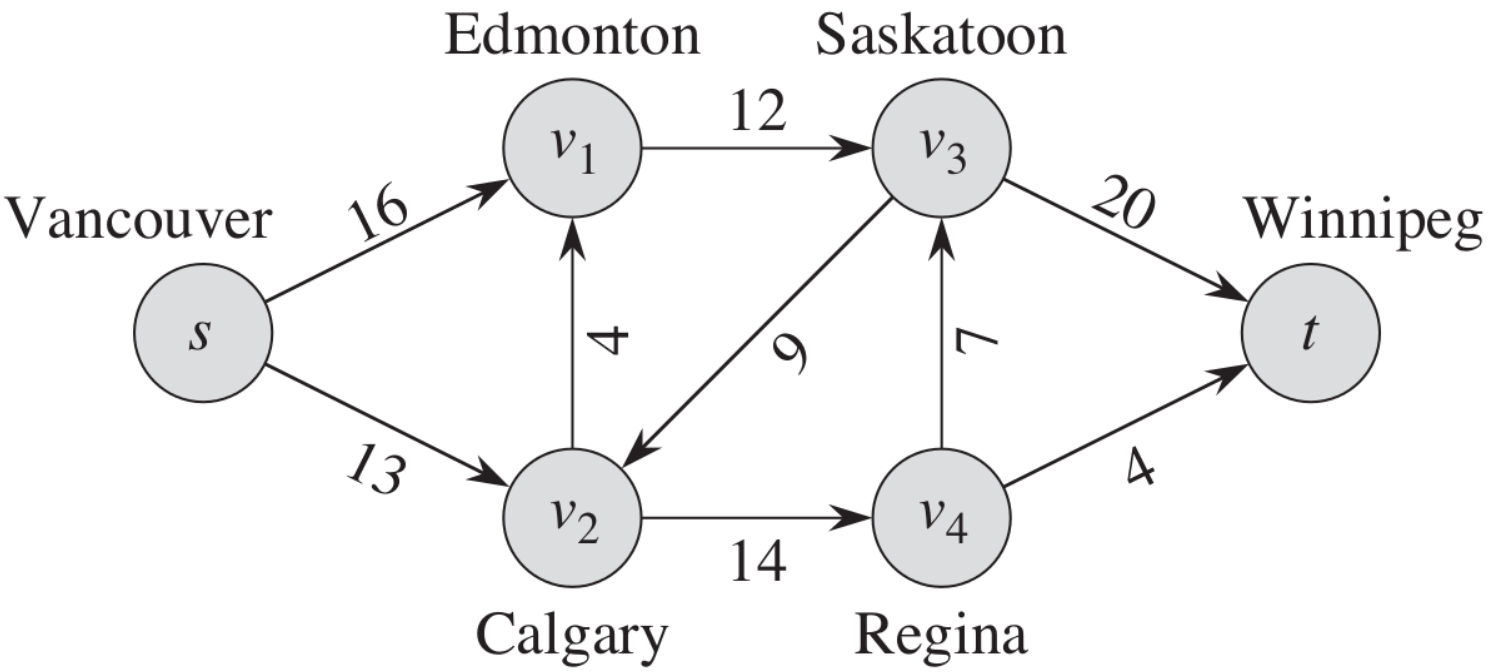
Método de Ford-Fulkerson: fluxo máximo no grafo G, de s para t

Ford-Fulkerson(G, s, t):
  Inicializar fluxo f a zero
  Enquanto existir um *caminho de aumento* p no grafo residual G_f **fazer**:
    aumentar fluxo f ao longo de p
  retornar f

- Um **caminho de aumento** (*augmenting path*) é um caminho pelo qual ainda é possível enviar fluxo
- Um **grafo residual** G_f é um grafo que indica como podemos modificar o fluxo nas arestas de G depois de já aplicado o fluxo f.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Vejamos agora um exemplo do Ford-Fulkerson passo a passo para que possa compreender bem os conceitos usados.

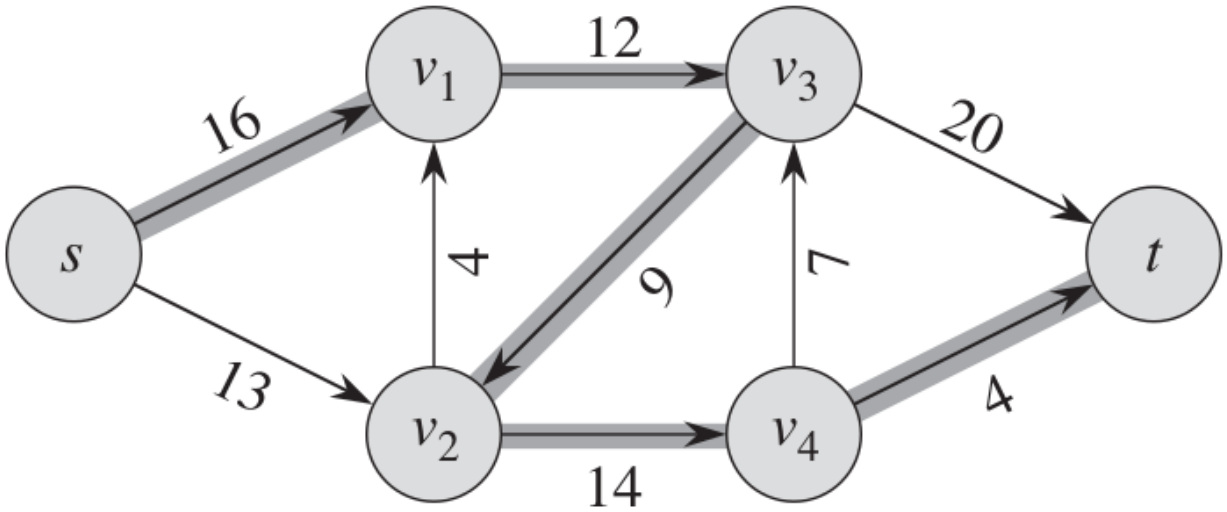


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este é o grafo inicial com as capacidades indicadas nas arestas.

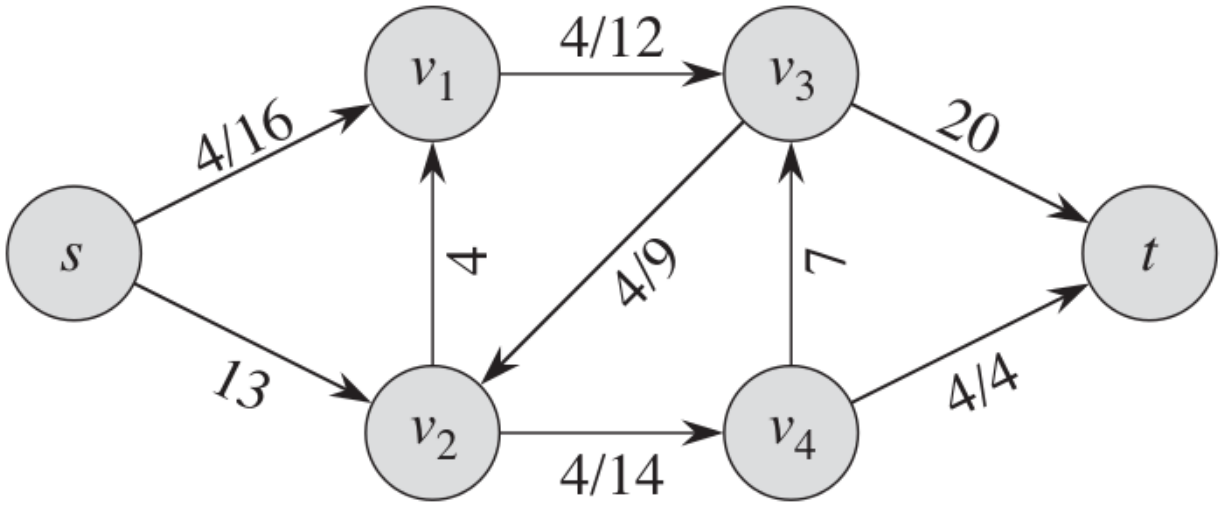
Ford-Fulkerson passo a passo

- Um **caminho de aumento** é um caminho entre a origem s e o destino t que nos permite adicionar fluxo, ou seja, um caminho onde a capacidade mínima das arestas é maior que 0.
- No caso do nosso grafo existem vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow t$, indicado a cinzento.
- A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 16, 12, 9, 14 e 4), pelo que podemos enviar um fluxo de 4.



Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)



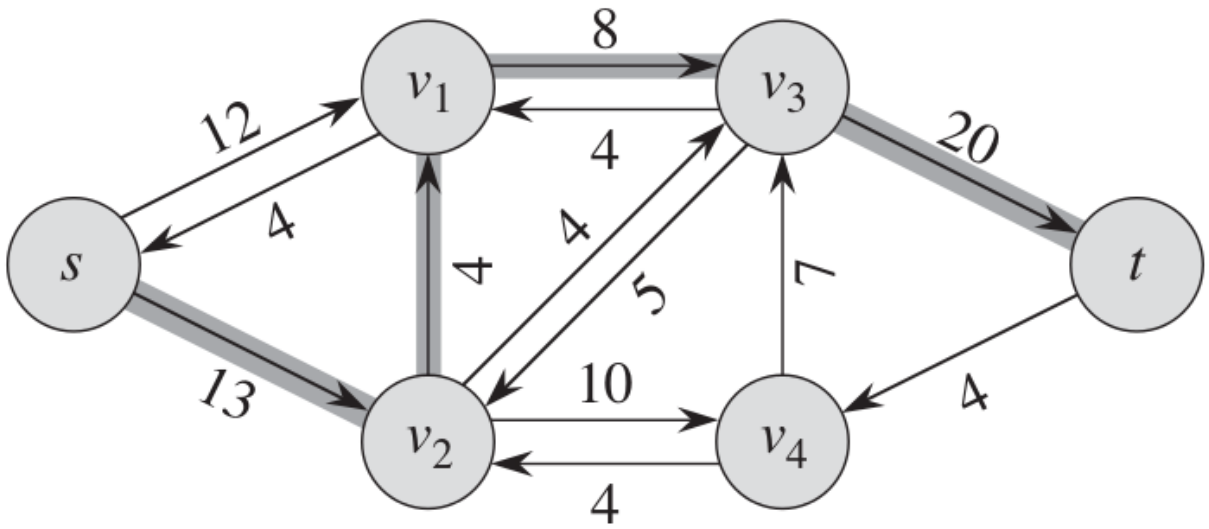
(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

Ford-Fulkerson passo a passo

- O **grafo residual** mostra onde podemos ainda aplicar fluxo.
- Depois de adicionarmos um fluxo $f(a)$ longo de um caminho, o grafo residual é obtido fazendo as seguintes transformações ao longo de cada aresta (u, v) no caminho de aumento que escolhemos:
  - Na **direção do caminho** que tomamos, reduzimos o peso das arestas em $f(a)$, ou seja, $c(u, v) = c(u, v) - f(a)$. Se $c(u, v)$ ficar a zero, retiramos a aresta. Isto representa a quantidade de fluxo que ainda podemos fazer passar pela aresta na direção original
  - Na **direção oposta**, aumentamos o peso da aresta em $f(a)$, ou seja, $c(v, u) = c(v, u) + f(a)$. Se a aresta não existia, cria-se. Isto representa que se quisermos podemos "retirar" fluxo ao longo desta aresta, o que pode dar jeito para aumentar depois via outro caminho.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

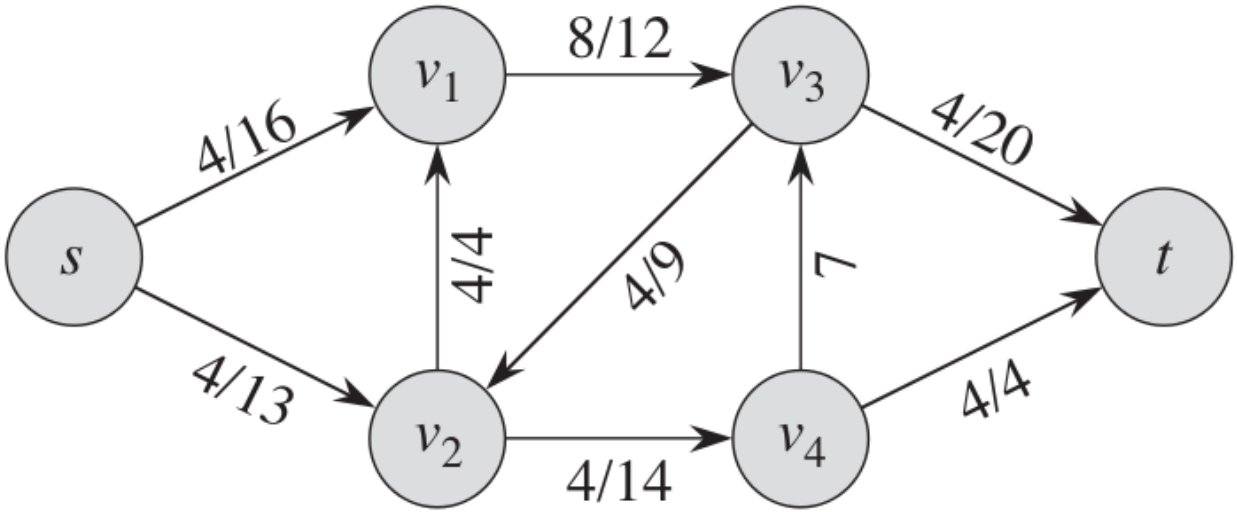


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_2 \to v_1 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 13, 4, 8 e 20).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

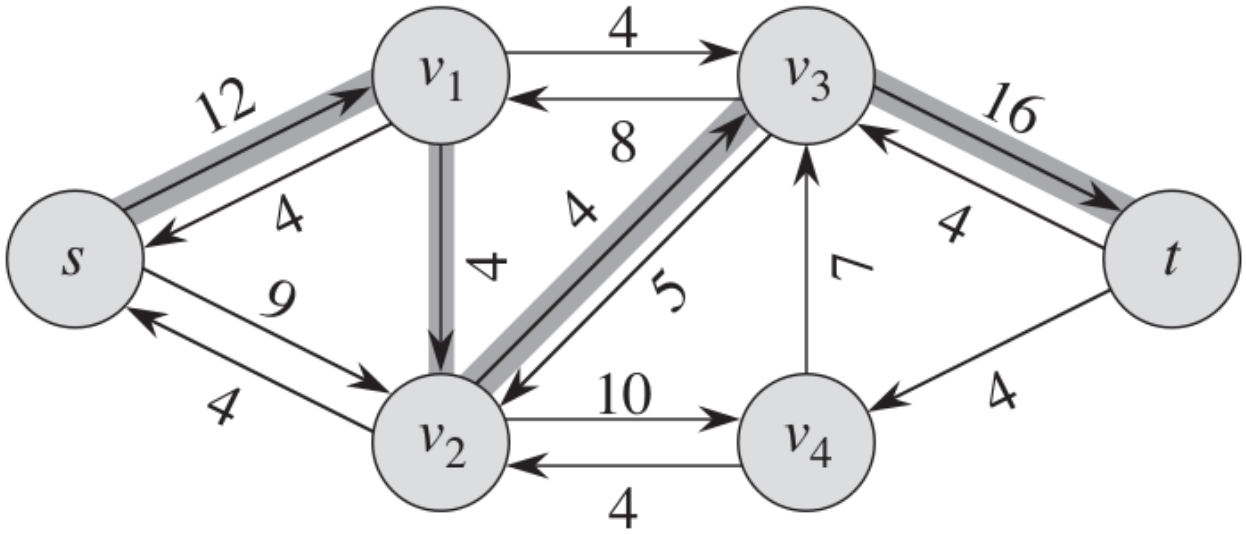


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 8 (4 + 4).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

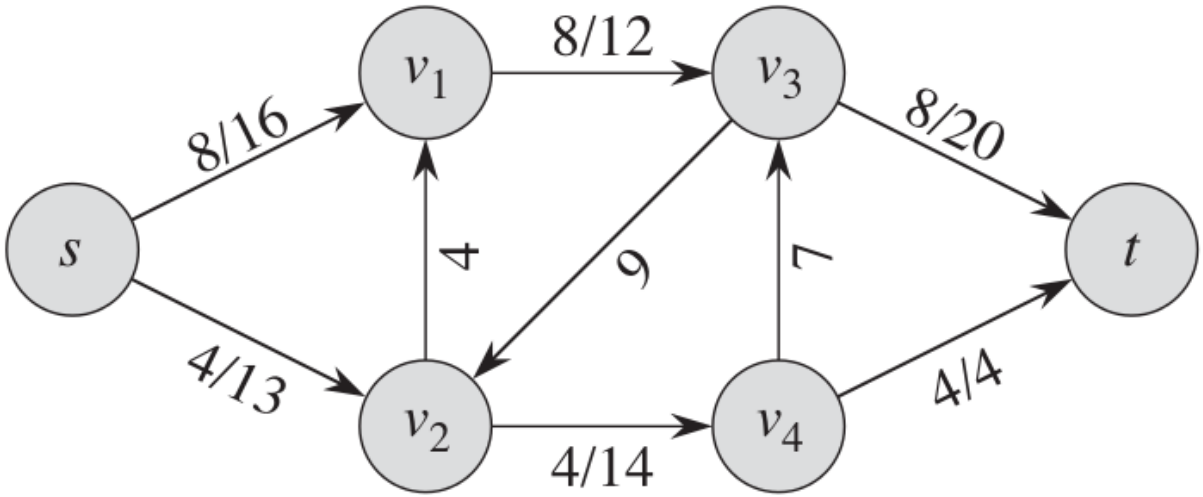


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 12, 4, 4 e 16). Note como está a ser usada a aresta (v_1, v_2) que tinha sido criada anteriormente.

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

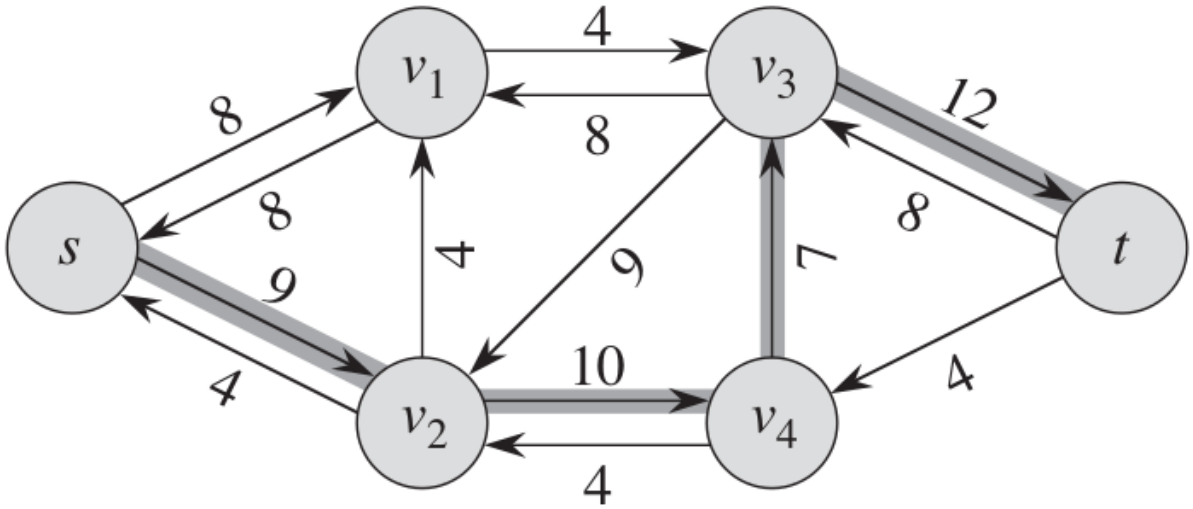


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 12 (8 + 4).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

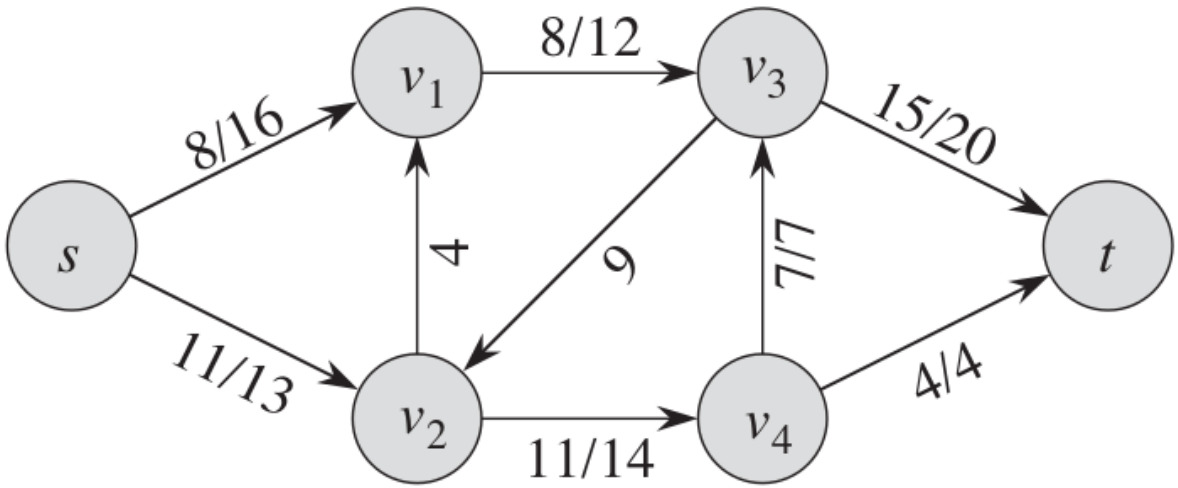


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda admite vários caminhos de aumento. Entre eles está o caminho $s \to v_2 \to v_4 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 7 (mínimo entre 9, 10, 7 e 12).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 7 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

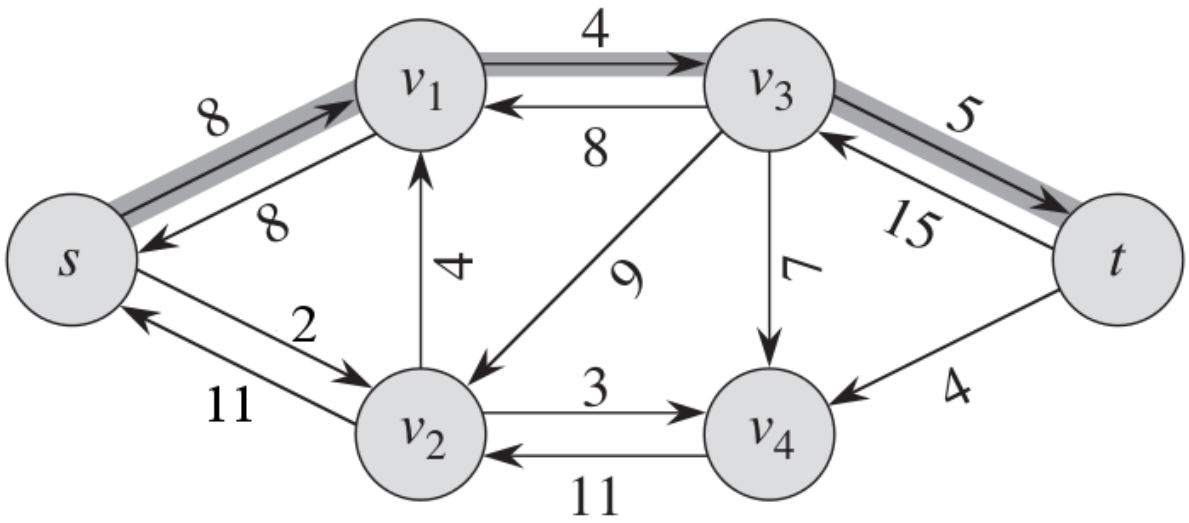


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 19 (8 + 11).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 7 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.

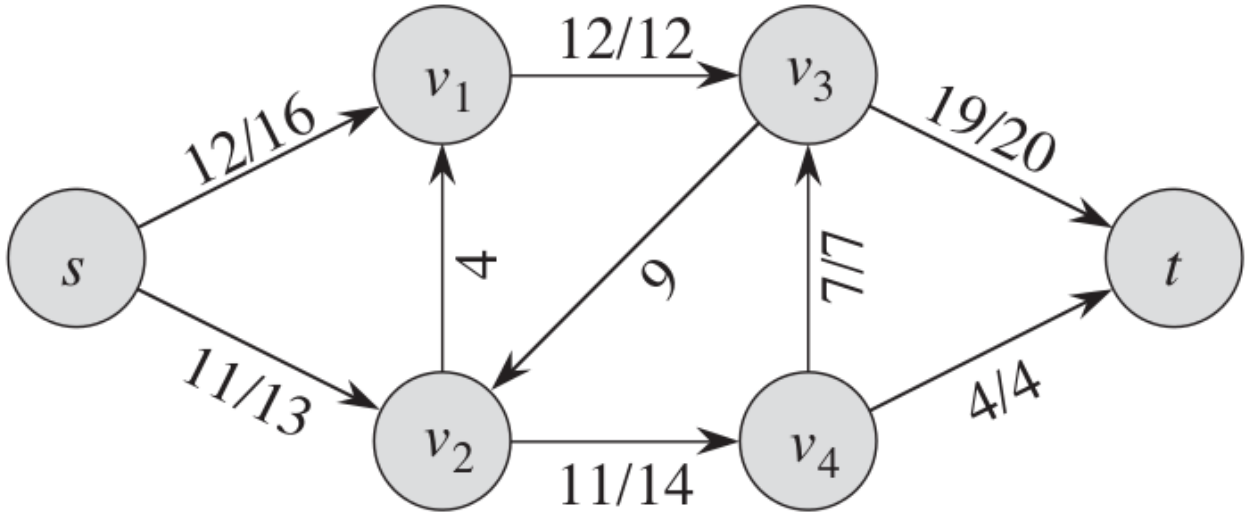


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual ainda tem um caminho de aumento: $s \to v_1 \to v_3 \to t$. A capacidade mínima ao longo do caminho é 4 (mínimo entre 8, 4 e 5).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Ao enviarmos o fluxo de 4 ao longo do novo caminho atrás indicado, os fluxos ficam do seguinte modo:
  (a/b nas aresta indica `fluxo/capacidade`)

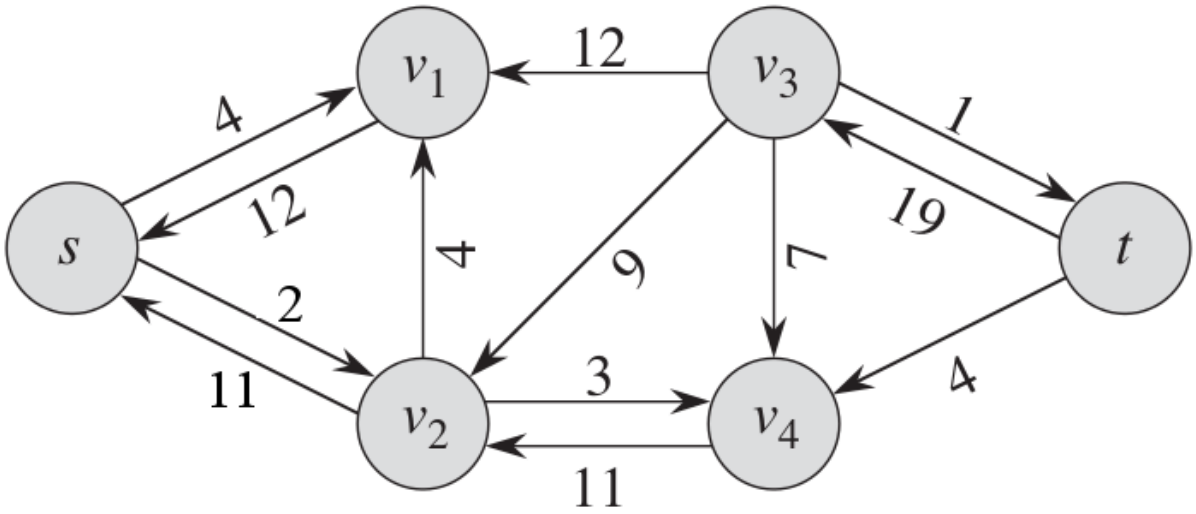


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- O fluxo total a sair da origem é agora de 23 (12 + 11).

Ford-Fulkerson passo a passo

- Depois do novo fluxo de 4 indicado atrás, o grafo residual ficava como a imagem seguinte documenta.



(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Este grafo residual já não admite mais caminhos de aumento e o nosso método de Ford-Fulkerson fica por aqui!
- Este é o grafo residual do fluxo máximo que é de 23.

Algoritmo de Ford-Fulkerson

- Seja qual for o caminho de aumento que formos escolhendo, é garantido que iremos convergir para o fluxo máximo
  (apenas no caso de os números serem irracionais é que isto não acontece, mas não iremos estudar casos destes em DAA).

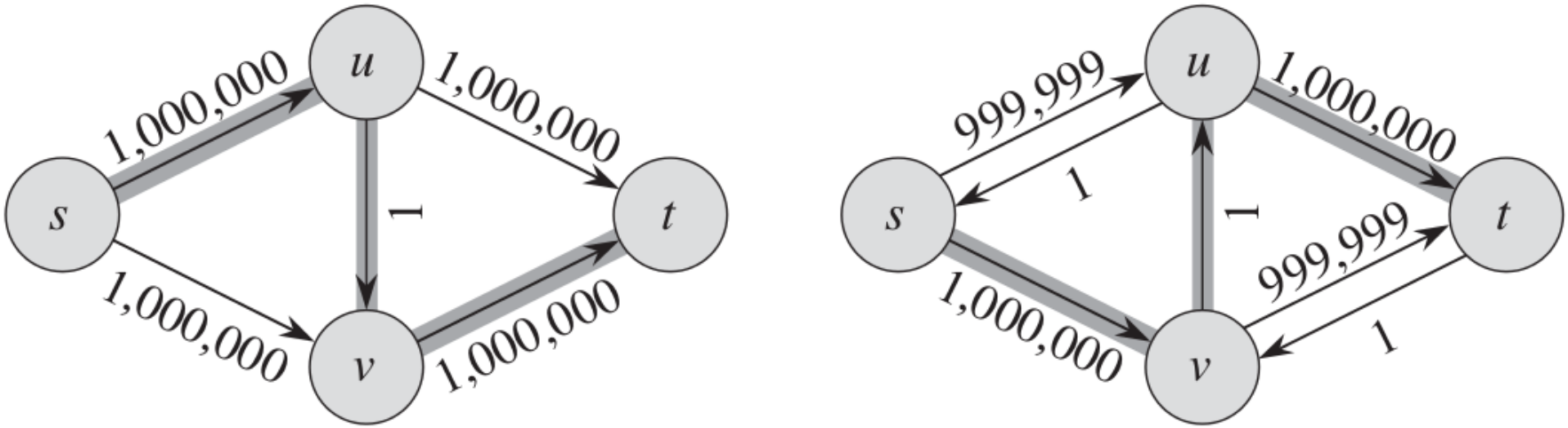
- Para concretizar o método de Ford-Fulkerson precisamos de uma maneira de descobrir um caminho de aumento.

- Uma maneira possível é usar uma **pesquisa em profundidade**. Neste caso diz-se que estamos a usar o **algoritmo de Ford-Fulkerson**.

  - A complexidade de uma pesquisa em profundidade é de $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, o que pode ser simplificado para $\mathcal{O}(|E|)$ se admitirmos que o grafo é conexo (e nesse caso $|E| \geq |V| - 1$).
  - Seja $|f^*|$ o fluxo máximo. Apesar de um caminho de aumento fazer sempre o fluxo aumentar, pode aumentar muito "devagarinho". Se os números forem inteiros, pode aumentar apenas 1 de cada vez, pelo que a complexidade final do algoritmo é de $\mathcal{O}(|E| \times |f^*|)$

Algoritmo de Ford-Fulkerson

- A figura seguinte ilustra um grafo onde potencialmente o algoritmo de Ford-Fulkerson pode escolher caminhos que impliquem ir aumentando apenas 1 de cada vez, para um total potencial de 2 milhões de iterações antes de terminar



(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

- Precisamos de uma maneira melhor de procurar um caminho de aumento...

Algoritmo de Edmonds-Karp

- Se para procurar um caminho de aumento usarmos uma **pesquisa em largura**, onde em cada passo procuramos o caminho mínimo (em termos de número de arestas), então estamos a usar o **algoritmo de Edmonds-Karp**.
  - Uma pesquisa em largura, tal como uma pesquisa em profundidade, demora $\mathcal{O}(|E|)$
  - Usar sempre o caminho de aumento com menor número de arestas garante que apenas precisamos de o ir aumentando $\mathcal{O}(|V| \times |E|)$ vezes (não iremos provar aqui isto, mas pode consultar o livro principal de DAA, o Introduction to Algorithms, para ver uma prova acessível).
  - Com isto, o algoritmo de Edmonds-Karp fica com uma complexidade total de $\mathcal{O}(|V| \times |E|^2)$
- Existem ainda algoritmos de fluxo máximo mais rápido - ex: Dinic, que na sua versão "normal" demora $\mathcal{O}(|E| \times |V|^2)$ - mas em DAA iremos ficar pelo Ford-Fulkerson e pelo Edmonds-Karp.

Aplicações de Fluxo Máximo

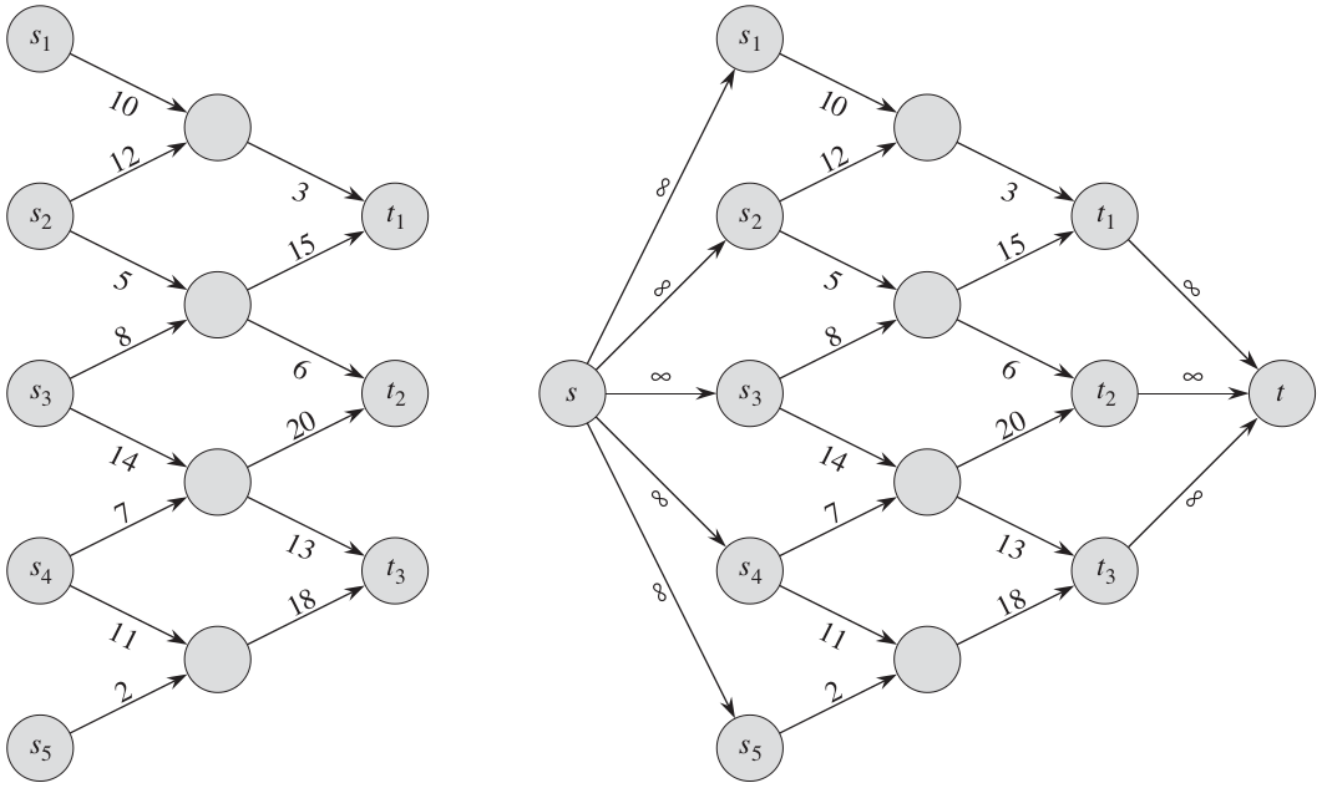
- Para terminar esta unidade, iremos falar de algumas **aplicações** possíveis de fluxo máximo, para além do caso onde estamos directamente a manipular uma rede de fluxo.

- Uma lista (não exaustiva) de aplicações:
  - Grafo com múltiplas origens e/ou múltiplos destinos
  - Encontrar número de caminhos que não usem as mesmas arestas
  - Encontrar o maior emparelhamento num grafo bipartido
  - ...

Aplicações de Fluxo Máximo

Grafo com múltiplas origens e/ou múltiplos destinos

- Se tivermos mais do que uma origem e mais do que um destino, basta adicionarmos uma nova "super-origem", ligada por arestas de capacidade infinita a todas as outras origens, e um novo "super-destino", que recebe arestas de capacidade infinita vindas de todos os outros destinos. No final basta encontrar o fluxo máximo entre a "super-origem" e o "super-destino"

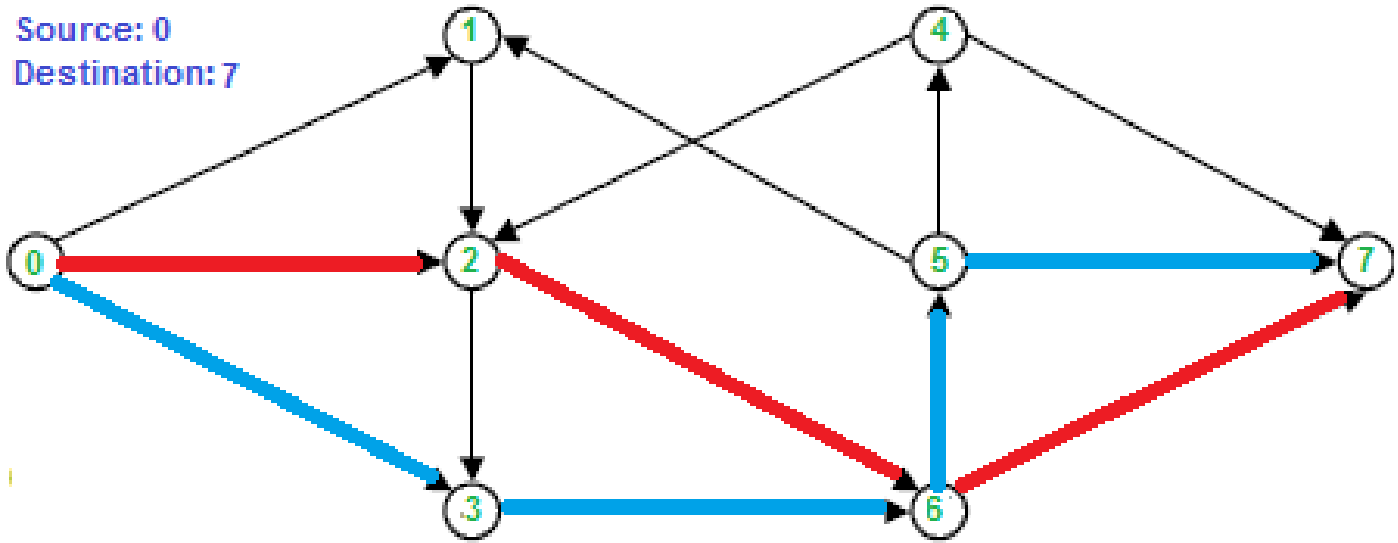


(imagem de Introduction to Algorithms, 3rd Edition)

Aplicações de Fluxo Máximo

Encontrar número de caminhos que não usem as mesmas arestas

- Imagine que quer encontrar o máximo número de caminhos entre dois pontos tal que uma mesma aresta não possa aparecer em dois caminhos diferentes (*edge disjoint paths*). Basta para isso criar uma rede de fluxo onde todas as arestas têm capacidade 1 e desse modo o fluxo máximo dá-nos o número máximo de caminhos que não usem as mesmas arestas (pois a sua capacidade apenas "deixa passar" um caminho)

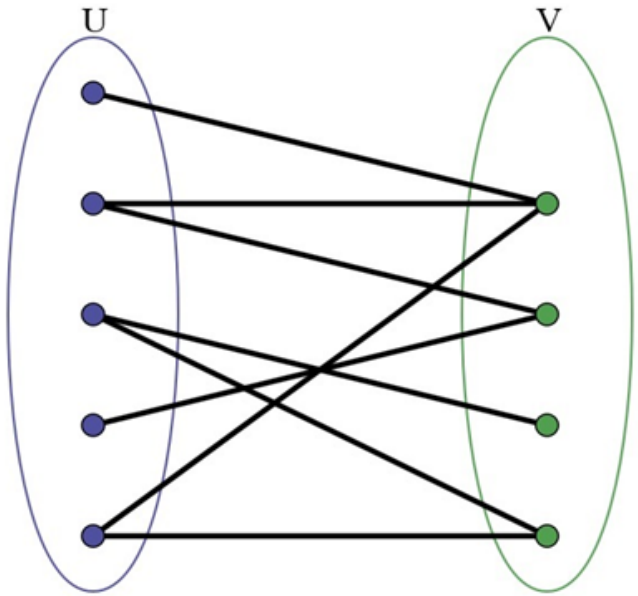


(imagem de geeksforgeeks)

Aplicações de Fluxo Máximo

Encontrar o maior emparelhamento num grafo bipartido

- Um **grafo bipartido** é um grafo onde onde os nós podem ser divididos em dois conjuntos de nós independentes, de tal maneira que uma qualquer aresta liga nós de conjuntos diferentes



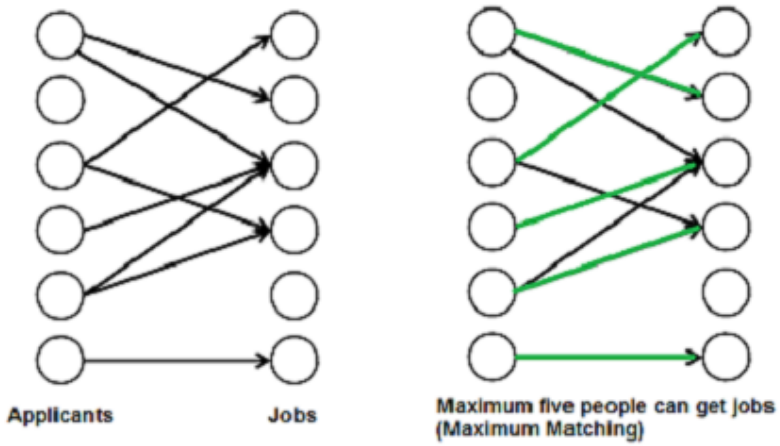
(imagem de geeksforgeeks)

Aplicações de Fluxo Máximo

Encontrar o maior emparelhamento num grafo bipartido

- Um **emparelhamento** num grafo bipartido é uma escolha de arestas tal que não exista mais do que uma aresta ligada a cada nó. Um **emparelhamento máximo** (*maximum bipartite matching*) é o emparelhamento de maior cardinalidade, ou seja, que use mais arestas.

- Imagine por exemplo uma situação onde temos candidatos e empregos, representandos por um grafo bipartido, onde existe uma aresta a indicar se um dado emprego é ou não desejado por um dado candidato. Supondo que um emprego só pode dar para um candidato, e que um candidato só pode ficar com um emprego, um emparelhamento máximo dava-nos a maneira de alocar o maior número possível de empregos a candidatos.

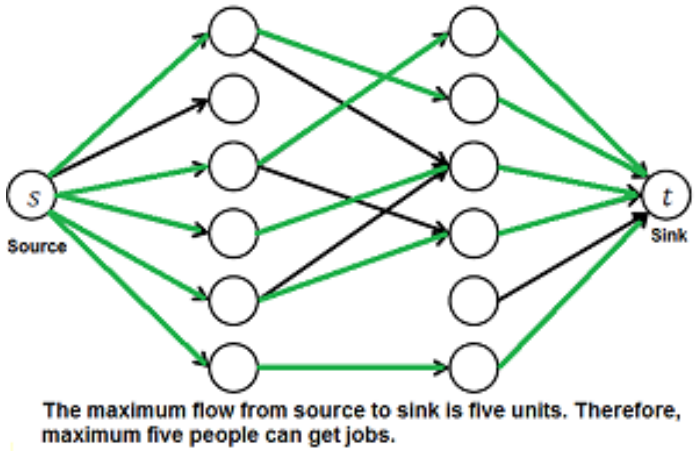


(imagem de geeksforgeeks)

Aplicações de Fluxo Máximo

Encontrar o maior emparelhamento num grafo bipartido

- Para descobrir um emparelhamento máximo, podemos simplesmente criar uma super origem ligada a todo o subconjunto de nós dos candidatos, e um super destino que recebe arestas de todos os empregos. Todas as arestas devem ter capacidade um e no final basta-nos calcular o fluxo máximo entre a super origem e o super destino!



(imagem de geeksforgeeks)