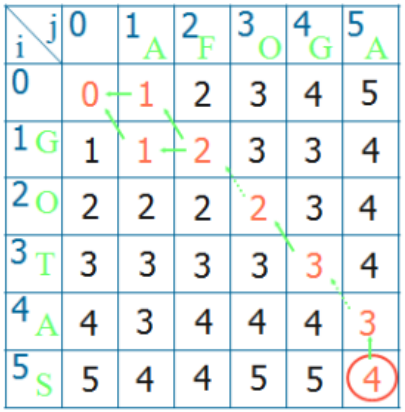
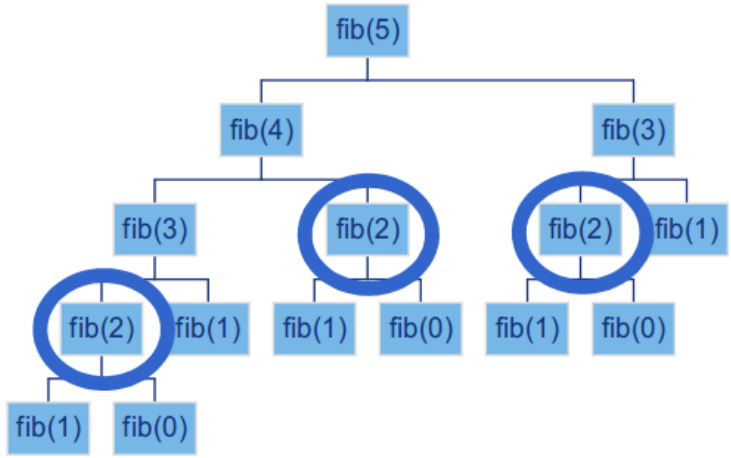
Programação Dinâmica

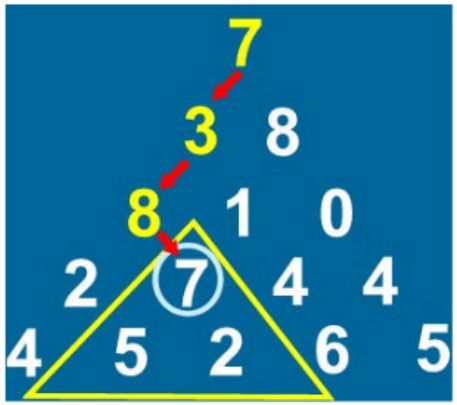
Pedro Ribeiro

DCC/FCUP

2020/2021







Números de Fibonacci

Sequência de números muito famosa definida por Leonardo Fibonacci

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,...

Números de Fibonacci

$F(0) = 0$
$F(1) = 1$
$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

Números de Fibonacci

- Como implementar?
- Implementação directa a partir da definição:

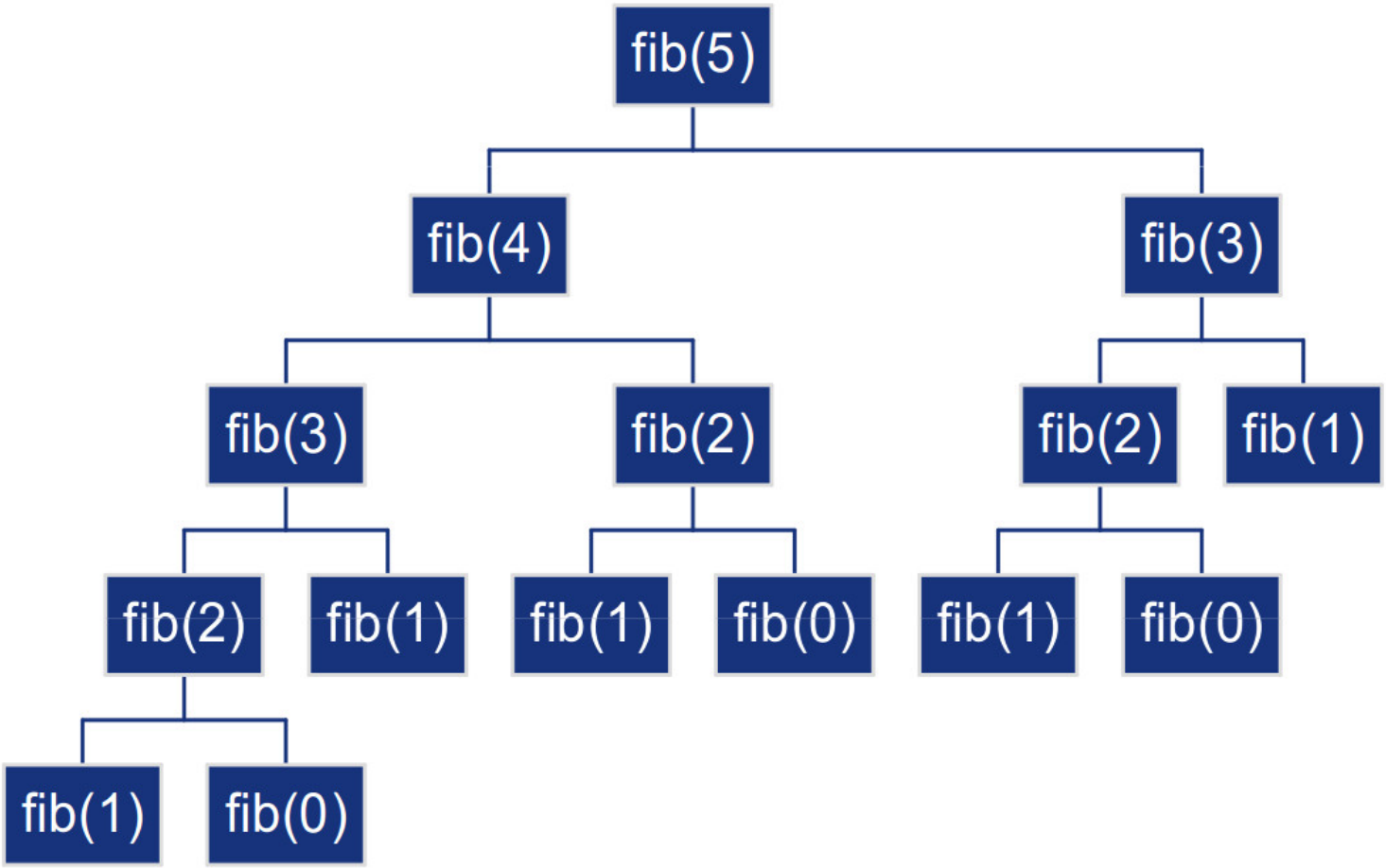
Fibonacci (a partir da definição)

fib(n):
  Se $n = 0$ ou $n = 1$ **então**
    retorna n
  Senão
    retorna $\text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$

- Pontos negativos desta implementação?

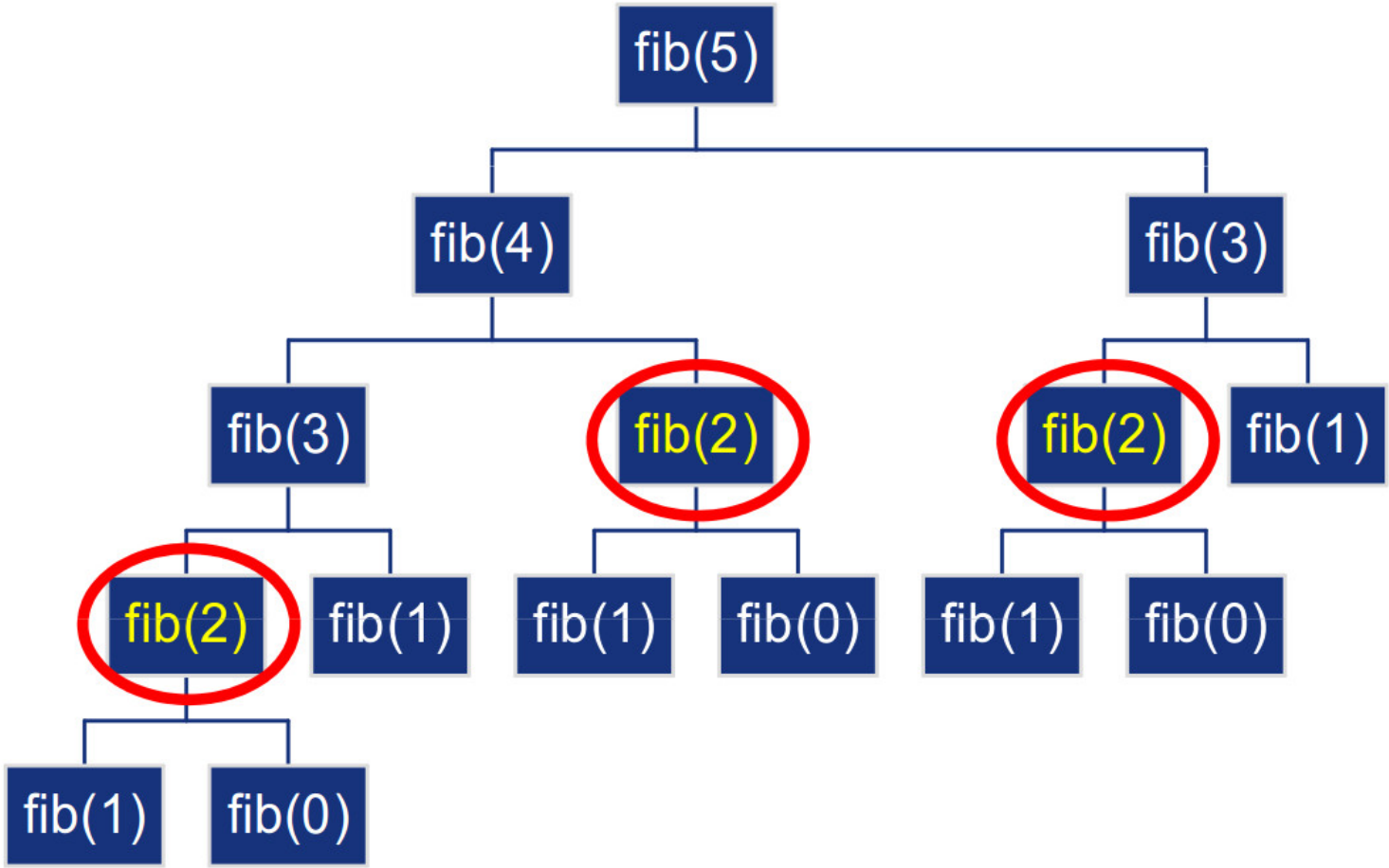
Números de Fibonacci

- Cálculo de **fib(**5**)**:



Números de Fibonacci

- Cálculo de **fib(**5**)**:



Por exemplo fib(2) é chamado 3 vezes!

Números de Fibonacci

- Como **melhorar**?
  - Começar do zero e manter sempre em memória os dois últimos números da sequência

Fibonacci (versão iterativa mais eficiente)

fib(n):
  Se $n = 0$ ou $n = 1$ **então**
    retorna n
  Senão
    $f_1 \leftarrow 1$
    $f_2 \leftarrow 0$
    Para $i \leftarrow 2$ **até** n **fazer**
      $f \leftarrow f_1 + f_2$
      $f_2 \leftarrow f_1$
      $f_1 \leftarrow f$
    retorna f

Números de Fibonacci

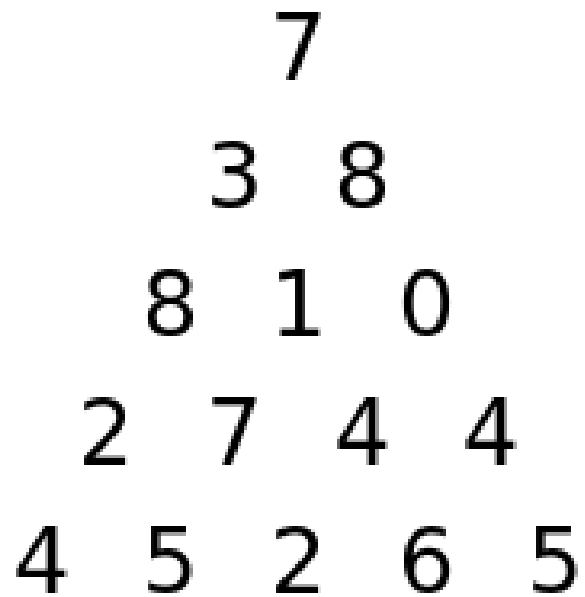
- **Conceitos** a reter:
  - Divisão de um problema em **subproblemas do mesmo tipo**
  - Calcular o mesmo subproblema **apenas uma vez**

- **Será que estas ideias podem também ser usadas em problemas mais "complicados"**?

Pirâmide de Números

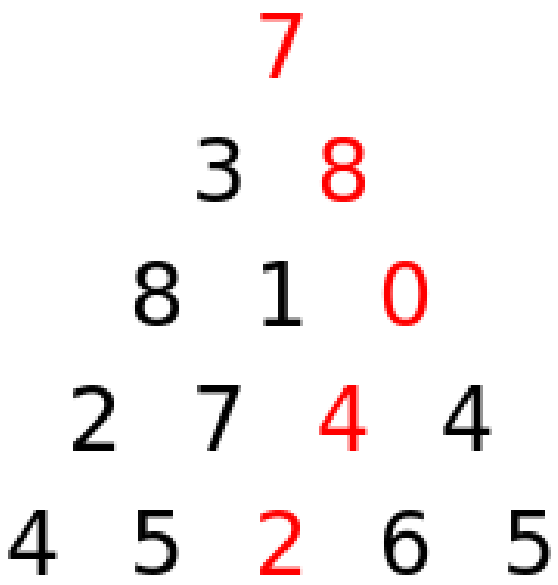
- Problema "clássico" das **Olimpíadas Internacionais de Informática de 1994**

- Calcular o **caminho**, que começa no topo da pirâmide e acaba na base, com **maior soma**. Em cada passo podemos ir diagonalmente para baixo e para a esquerda ou para baixo e para a direita.

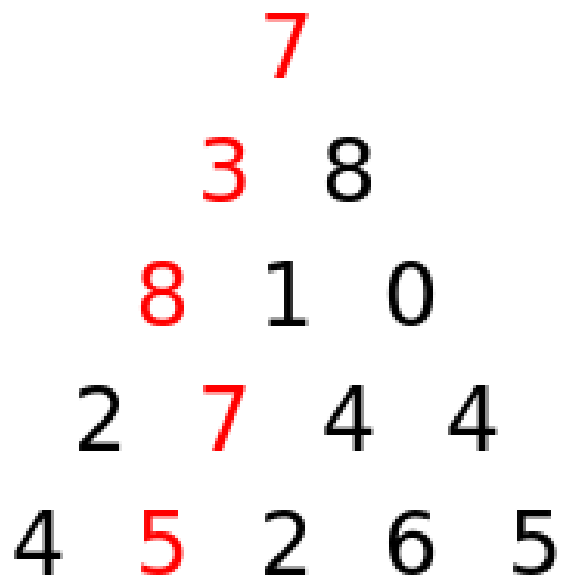


Pirâmide de Números

- Dois possíveis caminhos:



Soma = 21



Soma = 30

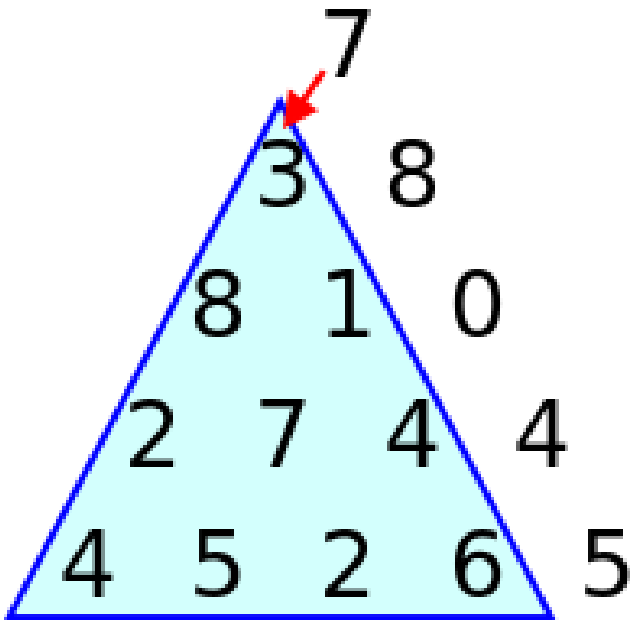
- **Restrições:** todos os números são inteiros entre 0 e 99 e o número de linhas do triângulo é no máximo 100.

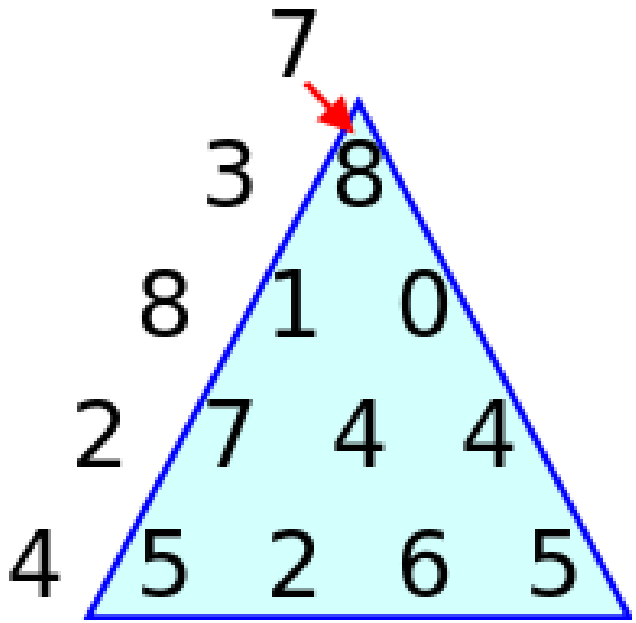
Pirâmide de Números

- Como resolver o problema?
- Ideia: **Algoritmo greedy**
  - Escolher sempre o maior número dos dois "descendentes"
    Não funciona! (ex: na pirâmide dada daria 28 e o ótimo é 30)
- Ideia: **Pesquisa Exaustiva** (*aka* "Força Bruta")
  - Avaliar todos os caminhos possíveis e ver qual o melhor.
- Quanto tempo demoraria? Quantos caminhos existem?
- Análise da **complexidade temporal**:
  - Em cada linha podemos tomar **duas decisões**: esquerda ou direita
  - Seja n a altura da pirâmide. Um caminho são... $n-1$ decisões!
  - Existem então 2^{n-1} caminhos diferentes
  - Um programa para calcular todos os caminhos tem portanto complexidade $\mathbf{O(2^n)}$: exponencial!
  - $2^{99} \sim 6.34 \times 10^{29}$ (633825300114114700748351602688)

Pirâmide de Números

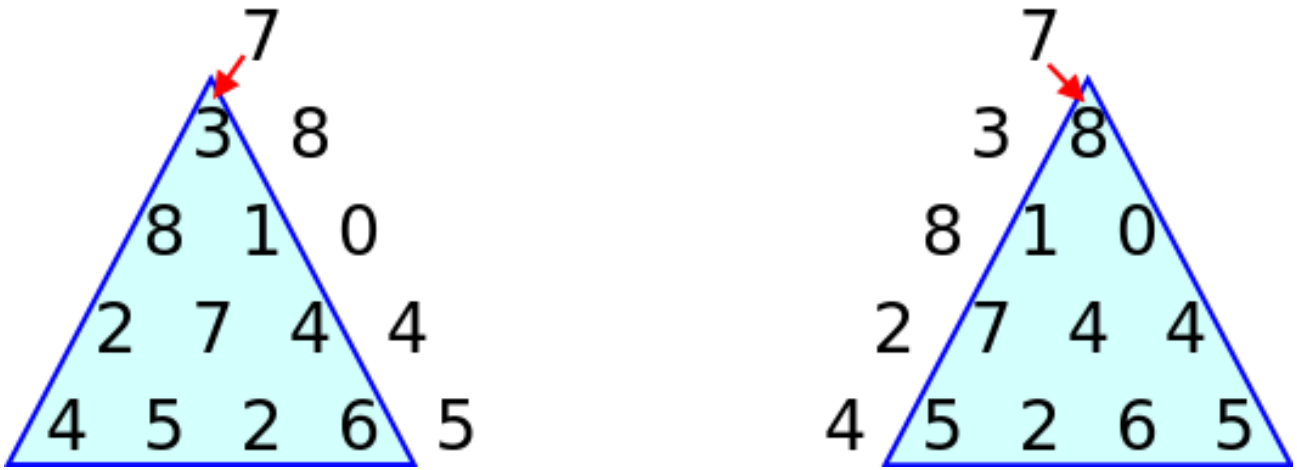
- Quando estamos no topo da pirâmide, temos **duas decisões possíveis** (esquerda ou direita):





- Em cada um dos casos temos de ter em conta **todas os caminhos das respectivas subpirâmides**.

Pirâmide de Números

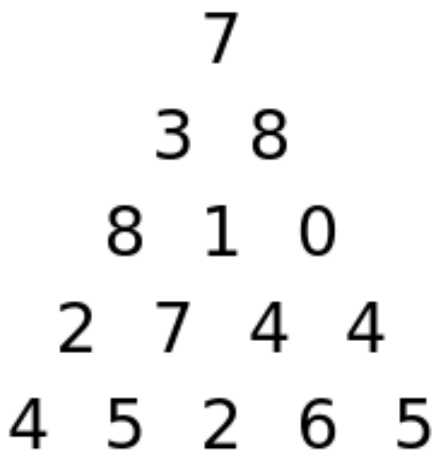


- Mas o que nos interessa saber sobre estas subpirâmides?
- **Apenas interessa o valor da sua melhor rota interna (que é um instância mais pequena do mesmo problema)!**
- Para o exemplo, a solução é 7 mais o máximo entre o valor do melhor caminho de cada uma das subpirâmides

Pirâmide de Números

- Então este problema pode ser resolvido **recursivamente**
  - Seja **P[i][j]** o j-ésimo número da i-ésima linha
  - Seja **Max(i, j)** o melhor que conseguimos a partir da posição i, j

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	7				
2	3	8			
3	8	1	0		
4	2	7	4	4	
5	4	5	2	6	5



Pirâmide de Números

Pirâmide de Números (a partir da definição recursiva)

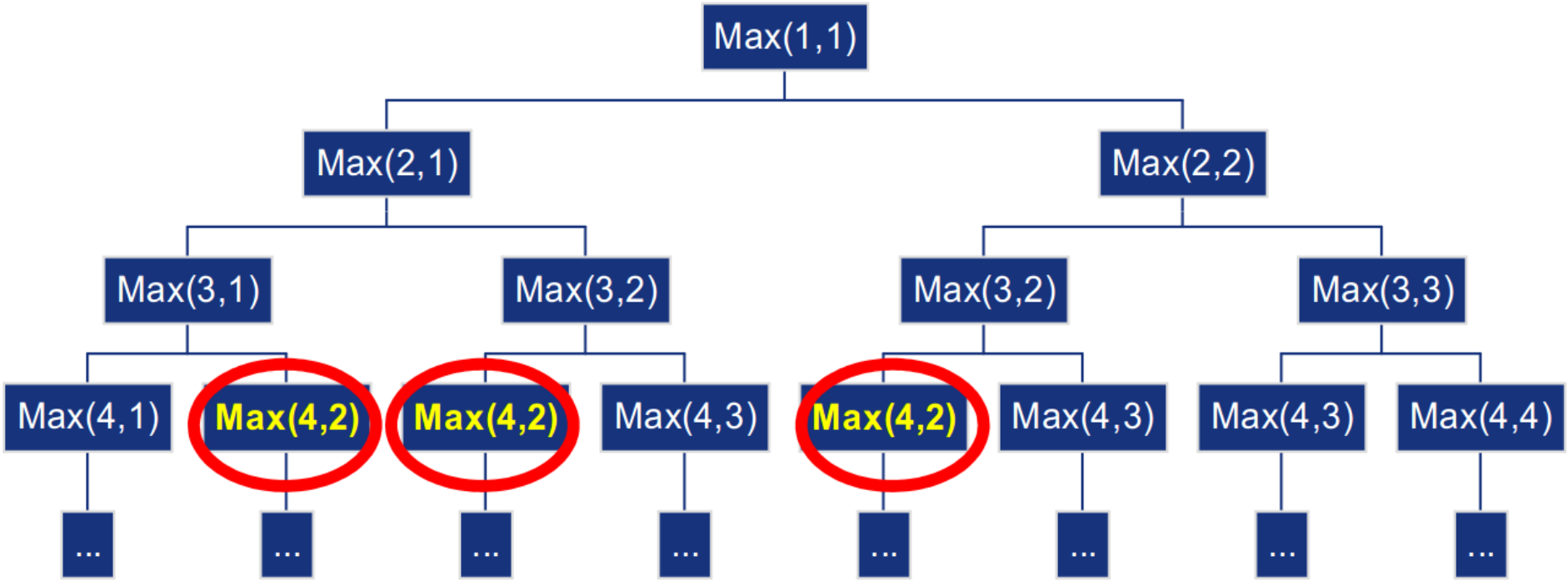
Max(i, j):
  Se $i = n$ **então**
    retorna $P[i][j]$
  Senão
    retorna $P[i][j]$ + **máximo** (Max$(i + 1, j)$, Max$(i + 1, j + 1)$)

- Para resolver o problema basta chamar... **Max(1,1)**

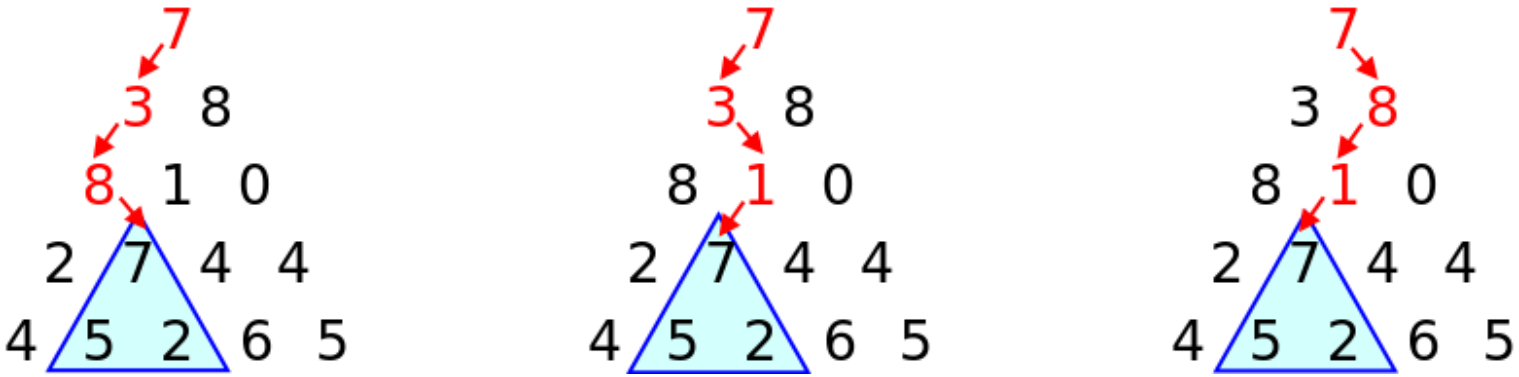
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	7				
2	3	8			
3	8	1	0		
4	2	7	4	4	
5	4	5	2	6	5

Pirâmide de Números

- Continuamos com **crescimento exponencial**!



- Estamos a avaliar o mesmo subproblema várias vezes...

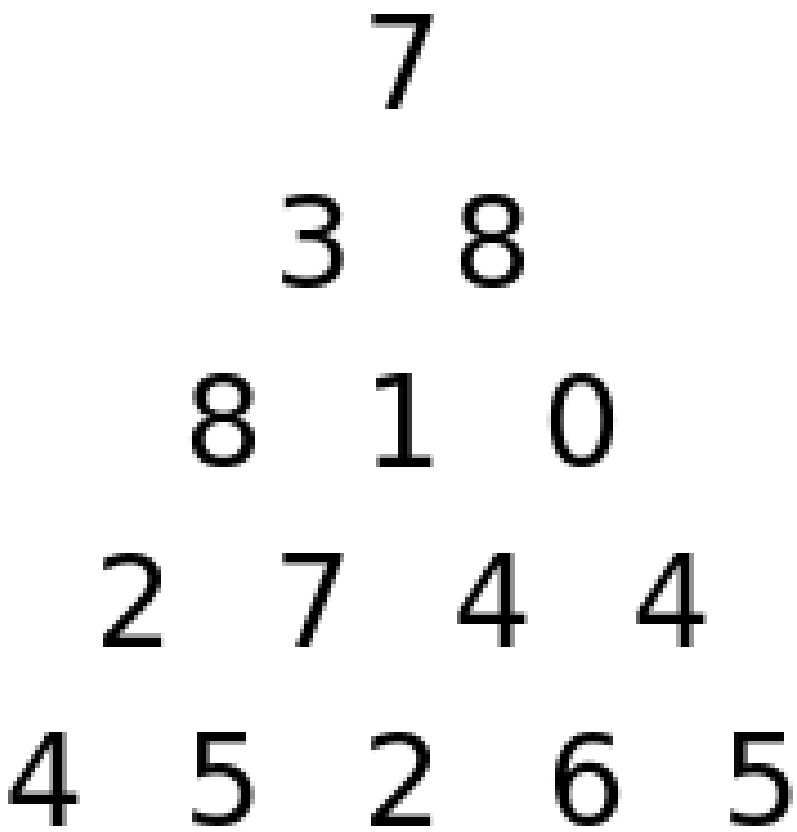


Pirâmide de Números

- Temos de **reaproveitar** o que já calculamos
  - Só calcular uma vez o mesmo subproblema
- Ideia: criar uma **tabela** com o valor obtido para cada subproblema
  - Matriz **M[i][j]**
- Será que existe uma **ordem para preencher a tabela** de modo a que quando precisamos de um valor já o temos?

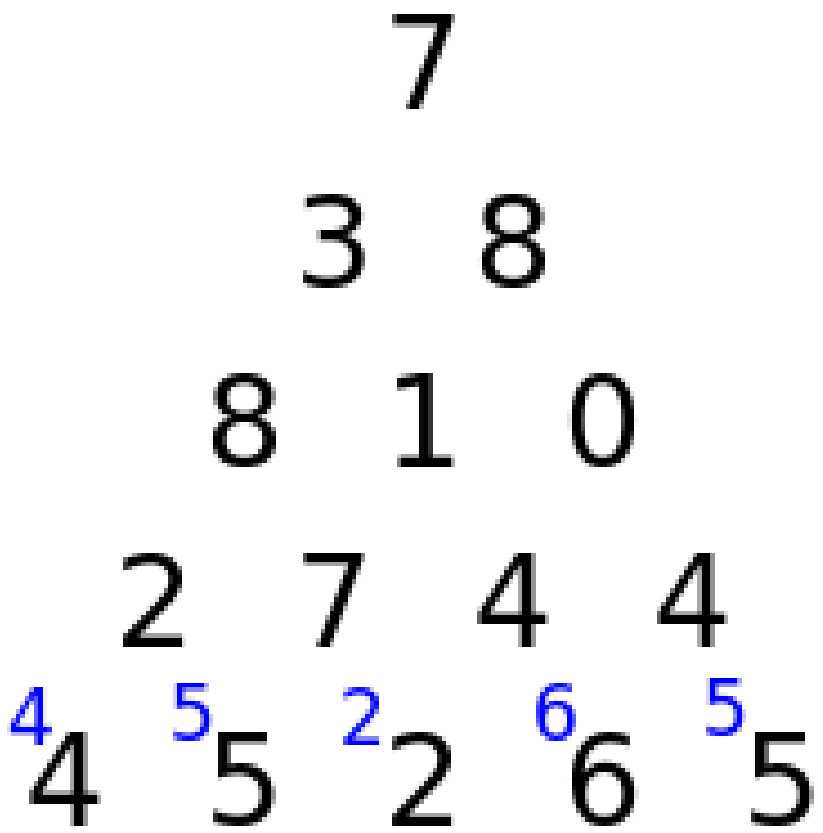
Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



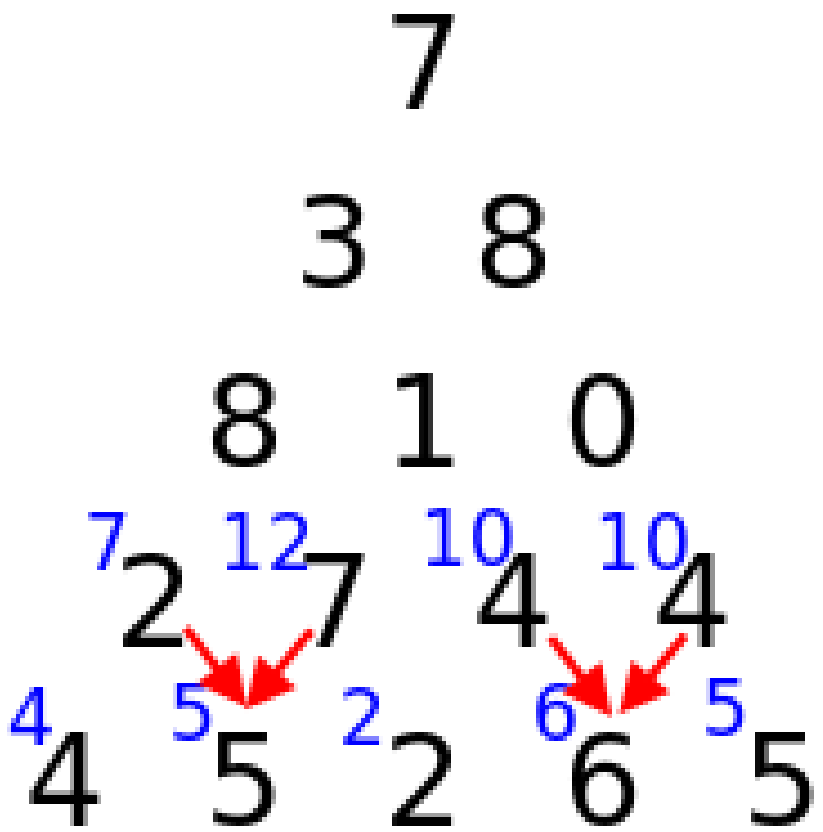
Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



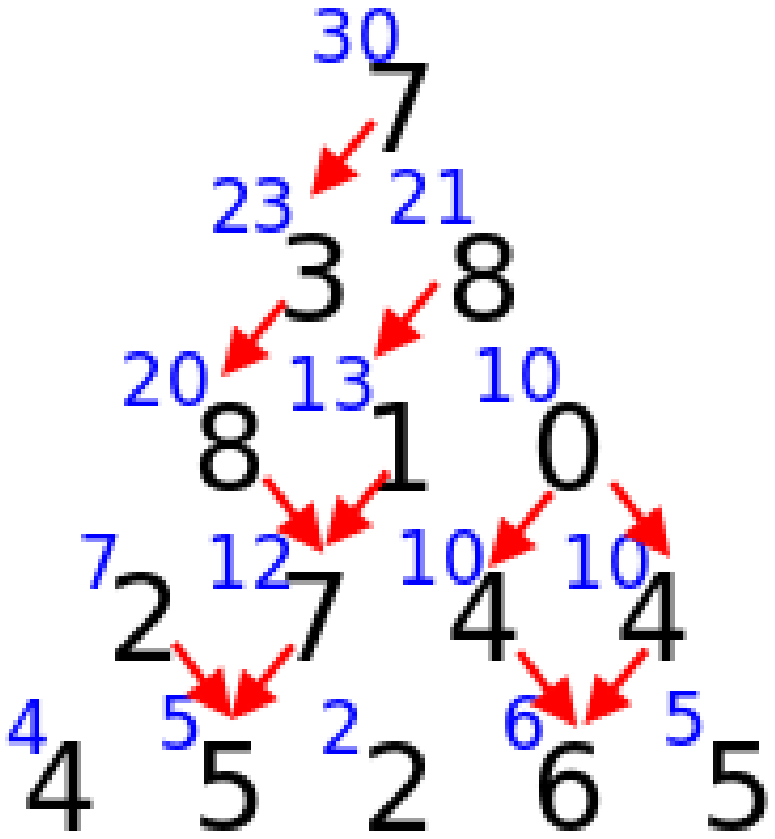
Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



Pirâmide de Números

- Começar a partir do fim! (base da pirâmide)



Pirâmide de Números

- Tendo em conta a maneira como preenchemos a tabela, até podemos aproveitar **P[i][j]**:

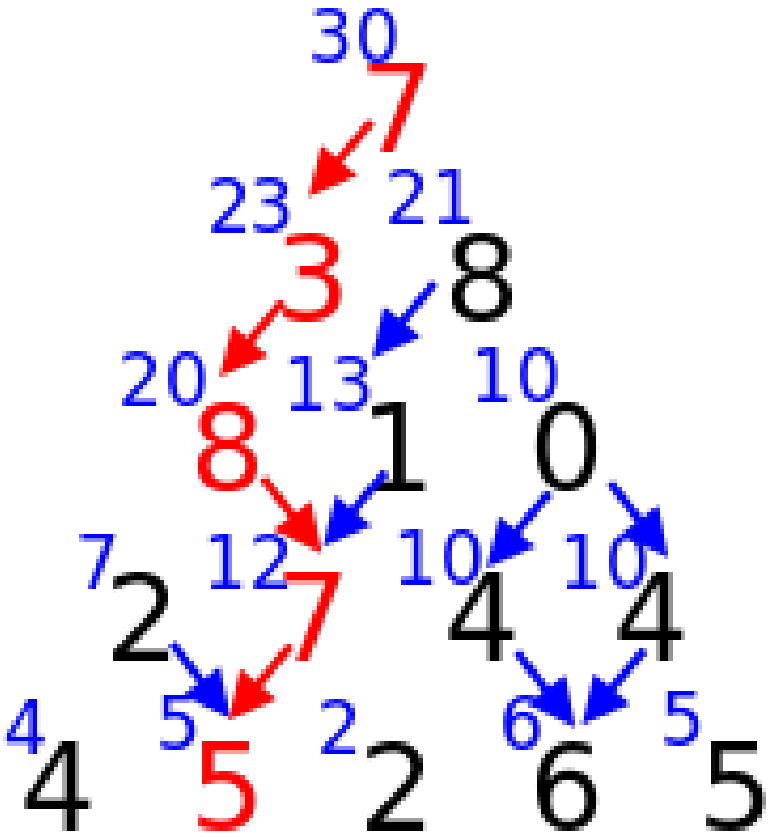
Pirâmide de Números (solução polinomial - $\mathcal{O}(n^2)$)

Calcular():
  Para $i \leftarrow n-1$ **até** 1 **fazer**
    Para $j \leftarrow 1$ **até** i **fazer**
      $P[i][j] \leftarrow P[i][j] +$ **máximo** $(P[i+1][j], P[i+1][j+1])$

- Com isto a solução fica em... **P[1][1]**
- Agora o tempo necessário para resolver o problema já só cresce polinomialmente (**O(n^2)**) e já temos uma solução admissível para o problema ($99^2 = 9801$)

Pirâmide de Números

- E se fosse necessário saber a constituição do melhor caminho?
  Basta usar a tabela já calculada!



Pirâmide de Números

Para resolver o problema da pirâmide de números usamos...

Programação Dinâmica (PD)

Programação Dinâmica

Programação Dinâmica

Uma **técnica algorítmica**, normalmente usada em **problemas de optimização**, que é baseada em guardar os resultados de subproblemas em vez de os recalcular.

- **Técnica algorítmica:** método geral para resolver problemas que têm algumas características em comum
- **Problema de Optimização:** encontrar a "melhor" solução entre todas as soluções possíveis, segundo um determinado critério (função objectivo). Geralmente descobrir um máximo ou mínimo.

Clássica troca de **espaço** por **tempo**

Programação Dinâmica

Quais são então as **características** que um problema deve apresentar para poder ser resolvido com PD?

- Subestrutura ótima
- Subproblemas coincidentes

Programação Dinâmica - Características

Subestrutura Ótima

Quando a solução óptima de um problema contém nela própria soluções óptimas para subproblemas do mesmo tipo

Exemplo

No problema da pirâmides de números, a solução óptima contém nela própria os melhores percursos de subpirâmides, ou seja, soluções óptimas de subproblemas

- Se um problema apresenta esta característica, diz-se que respeita o **princípio da optimalidade**.

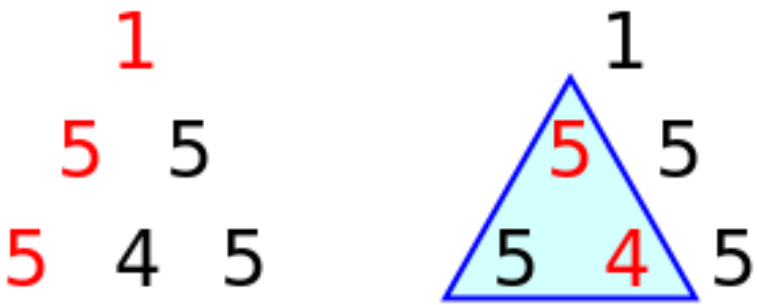
Programação Dinâmica - Características

Cuidado!

Nem sempre um problema tem subestrutura ótima!

Exemplo sem subestrutura ótima

Imagine que no problema da pirâmide de números o objectivo é encontrar o caminho que maximize o resto da divisão inteira entre 10 e a soma dos valores desse caminho



A solução ótima $(1 \rightarrow 5 \rightarrow 5)$ não contém a solução ótima da subpirâmide assinalada $(5 \rightarrow 4)$

Programação Dinâmica - Características

Subproblemas Coincidentes

Quando um espaço de subproblemas é "pequeno", isto é, não são muitos os subproblemas a resolver pois muitos deles são exactamente iguais uns aos outros.

Exemplo

No problema das pirâmides, para um determinada instância do problema, existem apenas $n + (n-1) + ... + 1 < n^2$ subproblemas (crescem polinomialmente) pois, como já vimos, muitos subproblemas que aparecem são coincidentes

Programação Dinâmica - Características

Cuidado!

Também esta característica nem sempre acontece.

- Mesmo com subproblemas coincidentes são muitos subproblemas a resolver

  ou

- Não existem subproblemas coincidentes.

Exemplo

No MergeSort, cada chamada recursiva é feita a um subproblema novo, diferente de todos os outros.

Programação Dinâmica - Metodologia

- Se um problema apresenta estas **duas características**, temos uma boa pista de que a PD se pode aplicar.
- Que **passos** seguir então para resolver um problema com PD?

Guia para resolver com PD

1. **Caracterizar** a solução óptima do problema
2. **Definir recursivamente** a solução óptima, em função de soluções óptimas de subproblemas
3. **Calcular** as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente" ou com "memoization"
4. **Reconstruir** a solução ótima, baseada nos cálculos efectuados (opcional - apenas se for necessário)

Programação Dinâmica - Metodologia

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- **Compreender** bem o problema
- Verificar se um algoritmo que verifique todas as soluções à **"força bruta"** não é suficiente
- Tentar **generalizar o problema** (é preciso prática para perceber como generalizar da maneira correcta)
- Procurar **dividir o problema** em subproblemas do mesmo tipo
- Verificar se o problema obedece ao **princípio de optimalidade**
- Verificar se existem **subproblemas coincidentes**

Programação Dinâmica - Metodologia

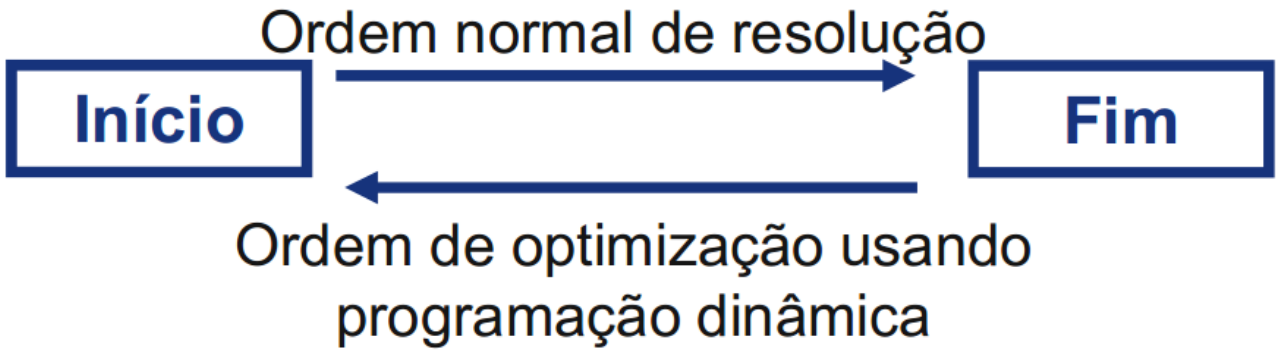
2) Definir recursivamente a solução óptima, em função de soluções óptimas de subproblemas

- **Definir recursivamente o valor da solução óptima**, com rigor e exactidão, a partir de subproblemas mais pequenos do mesmo tipo
- Imaginar sempre que os **valores das soluções óptimas já estão disponíveis** quando precisamos deles
- Não é necessário codificar. Basta definir **matematicamente** a recursão.

Programação Dinâmica - Metodologia

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

- **Descobrir a ordem** em que os subproblemas são precisos, a partir dos subproblemas mais pequenos até chegar ao problema global (**"bottom-up"**) e codificar, usando uma tabela.
- Normalmente esta **ordem é inversa** à ordem normal da função recursiva que resolve o problema



Programação Dinâmica - Metodologia

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "memoization"

- Existe uma técnica, conhecida como **"memoization"**, que permite resolver o problema pela ordem normal (**"top-down"**).
- Usar a **função recursiva** obtida directamente a partir da definição da solução e ir mantendo uma tabela com os resultados dos subproblemas.
- Quando queremos **aceder a um valor** pela primeira vez temos de calculá-lo e a partir daí basta ver qual é o resultado já calculado.

Programação Dinâmica - Metodologia

4) Reconstruir a solução ótima, baseada nos cálculos efectuados

- Pode (ou não) ser requisito do problema
- Duas alternativas:
  - **Directamente** a partir da tabela dos sub-problemas
  - **Nova tabela** que guarda as decisões em cada etapa
- Não necessitando de saber qual a melhor solução, podemos por vezes poupar espaço

Subsequência Crescente

- Dada uma sequência de números:

  7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2

- Descobrir qual a maior **subsequência crescente** (não necessariamente contígua)

  7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2 (Tamanho 2)
  7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2 (Tamanho 3)
  7, 6, 10, 3, 4, 1, 8, 9, 5, 2 (Tamanho 4)

Subsequência Crescente

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- Seja **n** o tamanho da sequência e **num[i]** o *i*-ésimo número
- "Força bruta", quantas opções? **Exponencial!** *(binomial theorem)*
- Generalizar e resolver com subproblemas iguais:
  - Seja **best(i)** o valor da melhor subsequência a partir da *i*-ésima posição
  - **Caso base:** a melhor subsequência a começar da última posição tem tamanho... 1!
  - **Caso geral:** para um dado i, podemos seguir para todos os números entre $i+1$ e n, desde que sejam... maiores
    - ★ Para esses números, basta-nos saber o melhor a partir daí! **(princípio da otimalidade)**
    - ★ O melhor a partir de uma posição é necessário para calcular todas as posições de índice inferior! **(subproblemas coincidentes)**

Subsequência Crescente

2) Definir recursivamente a solução óptima, em função de soluções óptimas de subproblemas

- **n** - tamanho da sequência
- **num[i]** - número na posição i
- **best(i)** - melhor subsequência a partir da posição i

Solução recursiva para Subsequência Crescente

$\text{best}(n) = 1$

$\text{best}(i) = 1 + \textbf{máximo}\{\text{best}(j):\ i < j \leq n, num[j] > num[i]\}$

para $1 \leq i < n$

Subsequência Crescente

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

- Seja **best[]** a tabela para guardar os valores de best()

Subsequência crescente (solução polinomial - $\mathcal{O}(n^2)$)

Calcular():

$best[n] \leftarrow 1$
Para $i \leftarrow n-1$ **até** 1 **fazer**
  $best[i] \leftarrow 1$
  Para $j \leftarrow i+1$ **até** n **fazer**
    Se $num[j] > num[i]$ **e** $1 + best[j] > best[i]$ **então**
      $best[i] \leftarrow 1 + best[j]$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
num[i]	7	6	10	3	4	1	8	9	5	2
best[i]	**3**	**3**	**1**	**4**	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**

Subsequência Crescente

4) Reconstruir a solução ótima

- Vamos exemplificar com uma tabela auxiliar que guarda as decisões
- Seja **next[i]** uma próxima posição para obter o melhor a partir da posição *i* ('-1' se é a última posição).

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
num[i]	7	6	10	3	4	1	8	9	5	2
best[i]	**3**	**3**	**1**	**4**	**3**	**3**	**2**	**1**	**1**	**1**
next[i]	**7**	**7**	**-1**	**5**	**7**	**7**	**8**	**-1**	**-1**	**-1**

Problema do Troco

Vamos revisitar um "velho conhecido"...

O problema do troco (problema do *cashier*)

Input: Um conjunto de valores de moedas S e uma quantia K a criar com as moedas

Output: O menor número de moedas que fazem a quantia K (podemos repetir moedas)

- Já vá vimos na semana anterior que um algoritmo greedy não funciona para todos os conjuntos de moedas
- Pesquisa exaustiva sobre todos os conjuntos de moedas também não é exequível em tempo útil (número exponencial de hipóteses)

Problema do Troco

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- Se utilizar uma moeda de quantia Q então passo a querer saber o menor número de moedas para fazer $K - Q$ **(princípio da optimalidade)**
- Intuitivamente, vou precisar de saber muitas vezes o mínimo para uma dada quantia **(subproblemas coincidentes)**

  ex: usando 3+5 vou parar ao mesmo "sítio" que usando 1+1+6 ou 4+4)
- Seja $coins(i)$ o menor número de moedas para fazer a quantia i
  Seja S_i a i-ésima moeda e N o número de moedas
  - $coins(i) = 1$ se existe moeda de quantia i
  - Para todas as outras quantias i basta-me ver as moedas S_i tal que $S_i < i$ e verificar $1 + coins(i - S_i)$
    (usar a moeda mais o mínimo do restante)

Problema do Troco

2) Definir recursivamente a solução óptima

- **K** - quantia que queremos criar com as moedas
- $\mathbf{S_i}$ - i-ésima moeda
- **N** - número de moedas
- **coins[i]** - menor número de moedas para fazer quantia i

Solução recursiva para problema do troco

$$\text{coins}(0) = 0$$

$$\text{coins}(i) = 1 + \textbf{mínimo}\{\text{coins}(i - S_j):\ 1 \leq j \leq N, S_j \leq i\}$$
$$\text{para } 1 \leq i \leq K$$

Problema do Troco

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

Problema do Troco (solução polinomial - $\mathcal{O}(N \times K)$)

Calcular():
  $coins[0] \leftarrow 0$
  Para $i \leftarrow 1$ **até** K **fazer**
    $coins[i] \leftarrow \infty$
    Para $j \leftarrow 1$ **até** N **fazer**
      Se $(S[j] \leq i$ **e** $1 + coins[i - S[j]] < coins[i]$ **então**
        $coins[i] \leftarrow 1 + coins[i - S[j]]$

Exemplo para $S = \{1, 5, 8, 11\}$, $K = 13$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
coins[i]	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**2**

Problema do Troco

4) Reconstruir a solução ótima

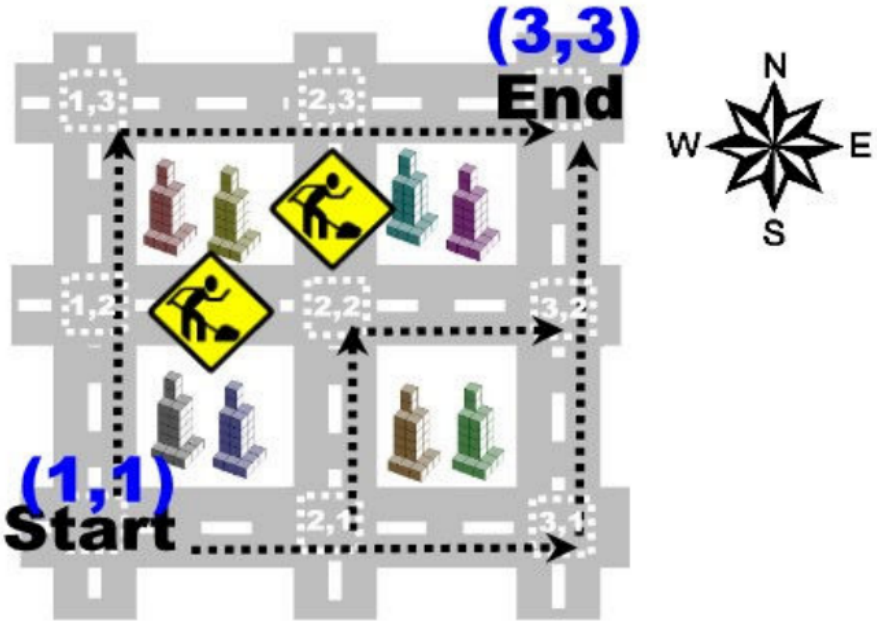
- Vamos exemplificar com uma tabela auxiliar que guarda as decisões
- Seja **use[i]** a 1ª moeda a usar para obter o mínimo número de moedas para fazer a quantia i
- No final bastava ir "percorrendo" o array de use[i]
  - $K = 13$, a primeira moeda é a de 5 ($use[13] = 5$)
  - $K = 13 - 5 = 8$, a moeda seguinte é a de 8 ($use[8] = 8$)
  - $K = 8 - 8 = 0$, mais nenhuma moeda é necessária

Exemplo para $S = \{1, 5, 8, 11\}$, $K = 13$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
coins[i]	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**	**2**	**1**	**2**	**2**
use[i]	**-**	**1**	**1**	**1**	**1**	**5**	**1**	**1**	**8**	**1**	**5**	**11**	**1**	**5**

Obras na Estrada - PD com contagens

- Este problema saiu na **MIUP'2004**
  (Maratona Inter-Universitária de Programação)
- Imagine um "quadriculado" de ruas em que:
  - Algumas estrada têm obras
  - Só se pode andar para norte e para este
  - Máximo tamanho do quadriculado: 30×30

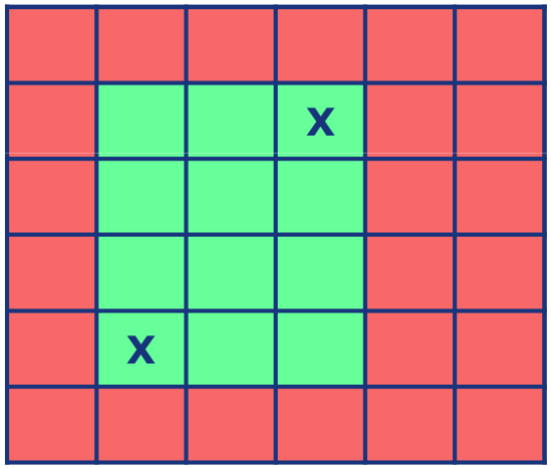


De quantas maneiras diferentes se pode ir de (x_1, y_1) para (x_2, y_2)?

Obras na Estrada - PD com contagens

1) Caracterizar a solução óptima do problema

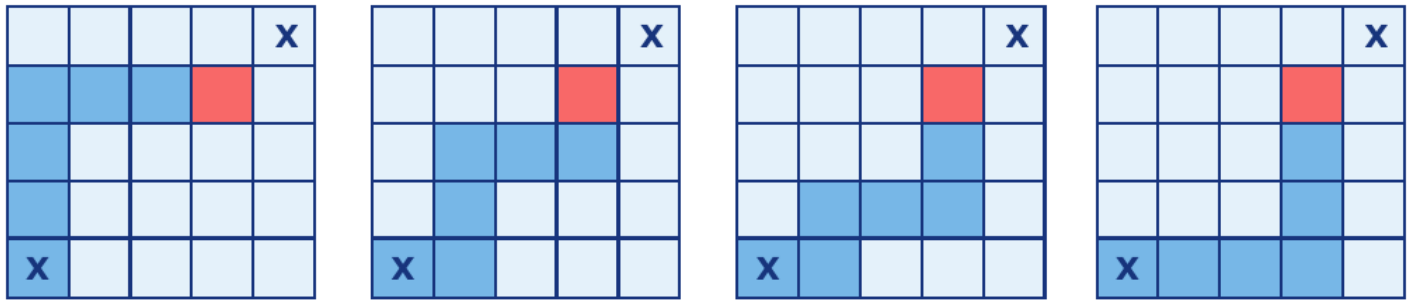
- "Força bruta", quantas opções?
  $N = 30$, existem $\sim 10^{16}$ caminhos
- Para ir de (x_1, y_1) para (x_2, y_2) pode ignorar-se tudo o que está "fora" desse rectângulo.



Obras na Estrada - PD com contagens

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- **Número de maneiras** a partir de uma posição é igual a:
  número de maneiras desde a posição a norte
  $+$
  número de maneiras desde a posição a este
- **Subproblema igual** com solução não dependente do problema "maior" (equivalente a **princípio da optimalidade**)
- Existem muitos **subproblemas coincidentes**!



Obras na Estrada - PD com contagens

2) Definir recursivamente a solução óptima

- **L** - número de linhas
- **C** - número de colunas
- **count(i,j)** - número de maneiras a partir da posição (i, j)
- **obra(i,j,D)** - valor booleano (V/F) indicando se existe obra a impedir deslocação de (i, j) na direcção D (NORTE ou ESTE)

Solução recursiva para Obras na Estrada

$\text{count}(L, C) = 1$

$\text{count}(i, j) = \text{valor\_norte}(i, j) + \text{valor\_este}(i, j)$

para $(i, j) \neq (L, C)$ onde:

$$valor\_norte(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } j = L \text{ ou } obra(i, j, NORTE) \\ count(i + 1, j) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$valor\_este(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = C \text{ ou } obra(i, j, ESTE) \\ count(i, j + 1) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Obras na Estrada - PD com contagens

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

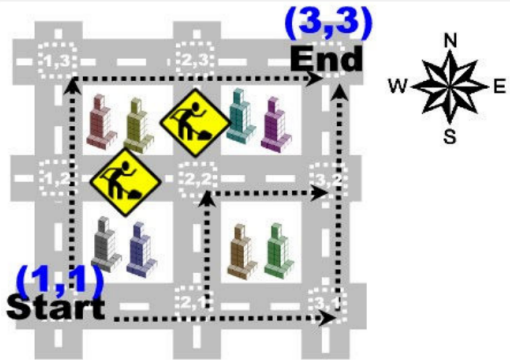
Obras na Estrada (solução polinomial - $\mathcal{O}(L \times C)$)

Calcular():

Inicializar $count[][]$ com zeros
$count[L][C] \leftarrow 1$
Para $i \leftarrow L$ **até** 1 **fazer**
  Para $j \leftarrow C$ **até** 1 **fazer**
    Se $i < L$ **e** não($obra(i, j, NORTE)$) **então**
      $count[i][j] \leftarrow count[i][j] + count[i+1][j]$
    Se $j < C$ **e** não($obra(i, j, ESTE)$) **então**
      $count[i][j] \leftarrow count[i][j] + count[i][j+1]$

count[][]

1	1	1
1	1	1
3	2	1



Jogo de Pedras

- Existem n pedras numa mesa
- Em cada jogada retira-se **1**, **3** ou **8** pedras
  (generalizável para qualquer número de peças)
- **Quem retirar as últimas pedras ganha o jogo!**

Dado o número de pedras, o jogador que começa a jogar pode garantidamente ganhar?

Exemplo

15 pedras na mesa: jogador A retira 8
7 pedras na mesa: jogador B retira 3
4 pedras na mesa: jogador A retira 1
3 pedras na mesa: jogador B retira 3
0 pedras na mesa: ganhou jogador B!

Jogo de Pedras

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- "Força bruta", quantos jogos possíveis? $O(3^N)$!
- Como generalizar? Seja **win(i)** um valor booleano (V/F) representando se com i pedras conseguimos ganhar **(posição ganhadora)**
  - Claramente $win(1)$, $win(3)$ e $win(8)$ são verdadeiras
  - E para os outros casos?
    - ★ Se a nossa jogada for dar a uma posição ganhadora, então o adversário pode forçar a nossa derrota
    - ★ Então, a nossa posição é ganhadora se conseguirmos chegar a uma posição que não o seja!
    - ★ Caso todas as jogadas forem dar a posições ganhadoras, a nossa posição é perdedora

Jogo de Pedras

2) Definir recursivamente a solução óptima

- **N** - número de pedras
- **win[i]** - valor booleano (V/F) indicando se posição i é ganhadora

Solução recursiva para Jogo de Pedras

$\text{win}(0) = \text{falso}$

$$\text{win}(i) = \begin{cases} \text{verdadeiro} & \text{se (win}[i-1]\text{=F) ou (win}[i-3]\text{=F) ou (win}[i-8]\text{=F)} \\ \text{falso} & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq N$

Jogo de Pedras

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

Jogo de Pedras (solução polinomial)

Calcular():

Para $i \leftarrow 0$ **até** N **fazer**

Se ($i \geq 1$ **e** win$[i-1]$=falso) **ou**

($i \geq 3$ **e** win$[i-3]$=falso) **ou**

($i \geq 8$ **e** win$[i-8]$=falso) **então**

$win[i] \leftarrow verdadeiro$

Senão

$win[i] \leftarrow falso$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
win[i]	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	F

Distância de Edição

- Vamos agora ver um exemplo mais "complexo"

Problema - Distância de Edição

Consideremos duas palavras pal_1 e pal_2. O nosso objectivo é **transformar** pal_1 **em** pal_2 usando apenas três tipos de transformações:

1. Apagar uma letra
2. Introduzir uma nova letra
3. Substituir uma letra por outra

Qual o **mínimo número de transformações** que temos de fazer para transformar uma palavra na outra? Chamamos a esta "medida" **distância de edição (de)**.

Exemplo

Para transformar "gotas" em "afoga" precisamos de 4 transformações:

$$\text{gotas} \xrightarrow{(1)} \text{gota\_} \xrightarrow{(3)} \text{fota} \xrightarrow{(3)} \text{foga} \xrightarrow{(2)} \text{afoga}$$

Distância de Edição

1) Caracterizar a solução óptima do problema

- Seja **de(a,b)** a distância de edição entre as palavras *a* e *b*
- Seja "" uma palavra vazia
- Existem alguns casos simples?
  - Claramente **de("","")** é zero
  - **de("",b)**, para qualquer palavra b? É o tamanho da palavra b (temos de fazer **inserções**)
  - **de(a,"")**, para qualquer palavra a? É o tamanho da palavra a (temos de fazer **remoções**)
- E nos outros casos? Temos de tentar dividir o problema por etapas, onde decidimos de acordo com subproblemas.

Distância de Edição

- Nenhuma das palavras é vazia
- Como podemos igualar o final das duas palavras?
  - Seja l_a a última letra de a e a' o resto da palavra a
  - Seja l_b a última letra de b e b' o resto da palavra b
- Se $l_a = l_b$, então só nos falta descobrir a distância de edição entre a' e b' (instância mais pequena do mesmo problema!)
- Caso contrário, temos três operações possíveis:
  - **Substituir** l_a por l_b. Gastamos 1 transformação e precisamos de saber a distância de edição entre a' e b'.
  - **Apagar** l_a. Gastamos 1 transformação e precisamos de saber a distância de edição entre a' e b.
  - **Inserir** l_b no final de a. Gastamos 1 transformação e precisamos de saber a distância de edição entre a e b'.

Distância de Edição

2) Definir recursivamente a solução óptima

- $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ - tamanho (comprimento) das palavras a e b
- **a[i]** e **b[i]** - letra na posição i das palavras a e b
- **de(i,j)** - distância de edição entre as palavras formadas pelas primeiras i letras de a e as primeiras j letras de b

Solução recursiva para Distância de Edição

$\text{de}(i, 0) = i$, para $0 \leq i \leq |a|$
$\text{de}(0, j) = j$, para $0 \leq j \leq |b|$

$$\text{de}(i,j) = \textbf{mínimo}(\text{de}(i-1, j-1) + \{0 \text{ se } a[i] = b[j],\ 1 \text{ se } a[i] \neq b[j]\},$$
$$\text{de(i-1, j)} + 1,$$
$$\text{de(i, j-1)} + 1)$$

para $1 \leq i \leq |a|$ e $1 \leq j \leq |b|$

Distância de Edição

3) Calcular as soluções de todos os subproblemas: "de trás para a frente"

Distância de Edição (solução polinomial)

Calcular():

Para $i \leftarrow 0$ **até** $|a|$ **fazer** $de[i][0] \leftarrow i$
Para $j \leftarrow 0$ **até** $|b|$ **fazer** $de[0][j] \leftarrow j$

Para $i \leftarrow 1$ **até** $|a|$ **fazer**
  Para $j \leftarrow 1$ **até** $|j|$ **fazer**
    Se $(a[i] = b[j]$ **então** $valor \leftarrow 0$
    Senão $valor \leftarrow 1$
    $de[i][j] =$ **mínimo**$(\ de[i-1][j-1] + value,$
    $de[i-1][j] + 1,$
    $de[i][j-1] + 1)$

Distância de Edição

- Vejamos a **tabela** para a distância de edição entre "gotas" e "afoga":

	j	0	1	2	3	4	5
i		«»	A	F	O	G	A
0	«»	0	1	2	3	4	5
1	G	1	1	2	3	3	4
2	O	2	2	2	2	3	4
3	T	3	3	3	3	3	4
4	A	4	3	4	4	4	3
5	S	5	4	4	5	5	4

de(i,0) = i, para $0 \leq i \leq |a|$
de(0,j) = j, para $0 \leq j \leq |b|$

de(i,j) = min(de(i-1,j-1) +
{0 se a[i]=b[j], 1 se a[i]≠b[j]},
de(i-1,j)+1,
de(i,j-1)+1),
para $1 \leq i \leq |a|$ e $0 \leq j \leq |b|$

Distância de Edição

- Se fosse preciso reconstruir a solução: