

# Recursividade

Pedro Ribeiro

DCC/FCUP

2021/2022



## Matemática:

- Uma fórmula diz-se **recursiva** quando inclui referências a si própria
- Exemplos:
- ▶ Factorial:  $n! = n \times (n - 1)!$
  - ▶ Fibonacci:  $fib(n) = fib(n - 1) + fib(n - 2)$

## Ciência de Computadores:

- Uma função diz-se **recursiva** quando inclui chamadas a si própria
  - ▶ Uma função não-recursiva é **iterativa**
- A **recursividade** é uma das técnicas algorítmicas mais usadas
  - ▶ Muitas soluções exprimem-se muito mais facilmente de forma recursiva
  - ▶ Vamos usar muita recursividade, por exemplo, com as árvores binárias
- Nesta aula vamos ver vários **exemplos de recursividade**

# Recursividade: um primeiro exemplo

- Vamos imaginar que temos um array de inteiros e queremos **descobrir o maior número** entre as posições *start* e *end*.
- A solução **iterativa** típica implica fazer um ciclo entre *start* e *end* e ir guardando o maior até ao momento:

```
int maxIt(int v[], int start, int end) {  
    int maxSoFar = v[start];  
    for (int i=start+1; i<=end; i++)  
        maxSoFar = Math.max(maxSoFar, v[i]);  
    return maxSoFar;  
}
```

Nota: **Math** é uma classe com várias funções de cariz matemático:

<https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/lang/Math.html>

Em particular, `Math.max(a,b)` devolve o maior número entre *a* e *b*

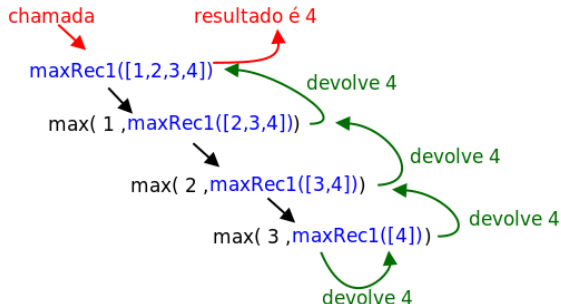
# Recursividade: um primeiro exemplo

- Como podemos definir **recursivamente** o máximo de uma lista?
- Em qualquer **função recursiva** precisamos tipicamente do seguinte: (relembrem a noção de dividir para conquistar)
  - ▶ **Caso base:** caso "pequeno" onde devolvemos a solução sem recursão
  - ▶ **Dividir** o problema em um ou mais casos mais pequenos que o original, mais próximos do caso base
  - ▶ **Chamar recursivamente** a função para os casos mais pequenos
  - ▶ **Combinar** os resultados recursivos para obter a solução global

# Recursividade: um primeiro exemplo

- Como podemos **partir o array** em pedaços mais pequenos?
  - ▶ Uma hipótese é considerar todo o array excepto o primeiro elemento:  
 $\text{max}(v) = \text{máximo entre } 1^{\text{o}} \text{ elemento e } \text{max}(\text{resto do array } v)$
- O **caso base** é um array de tamanho 1: o máximo é esse elemento

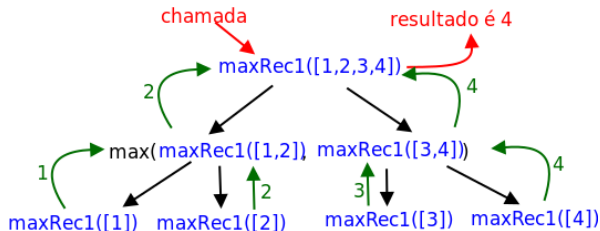
```
int maxRec1(int v[], int start, int end) {  
    if (start == end) return v[start]; // caso base  
    int max = maxRec1(v, start+1, end); // chamada recursiva  
    return Math.max(v[start], max); // combinar resultado  
}
```



# Recursividade: um primeiro exemplo

- Como podemos partir o array em pedaços mais pequenos?
  - ▶ Outra hipótese é partir o array em duas metades:  
 $\text{max}(v) = \text{máximo entre } \text{max}(\text{metade esquerda}) \text{ e } \text{max}(\text{metade direita})$
- O **caso base** continua a ser um array de tamanho 1

```
int maxRec2(int v[], int start, int end) {  
    if (start == end) return v[start];    // caso base  
    int middle = (start + end) / 2;  
    int max1 = maxRec2(v, start, middle); // chamada recursiva  
    int max2 = maxRec2(v, middle+1, end); // chamada recursiva  
    return Math.max(max1, max2);        // combinar resultado  
}
```



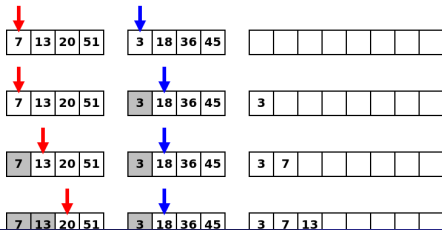
# Recursividade: MergeSort

- Vejamos o mesmo padrão agora para ordenar números: **MergeSort** (já detalhamos este algoritmo anteriormente)
  - ▶ Partir o array em duas metades
  - ▶ Ordenar recursivamente cada uma das metades
  - ▶ Juntar as duas metades ordenadas num única array ordenado
- O **caso base** continua a ser um array de tamanho 1: já está ordenado
- Vamos assumir que mergeSort ordena entre posições *start* e *end* (para ordenar tudo é só chamar com argumentos 0 e *tamanho* - 1)

```
void mergeSort(int v[], int start, int end) {  
    if (start == end) return;           // caso base  
    int middle = (start + end) / 2;  
    mergeSort(v, start, middle);       // chamada recursiva  
    mergeSort(v, middle+1, end);       // chamada recursiva  
    merge(v, start, middle, end);      // combinar resultados  
}
```

# Recursividade: MergeSort

```
void merge(int v[], int start, int middle, int end) {
    int aux[] = new int[end-start+1]; // Novo array temporário
    int p1 = start; // "Apontador" do array da metade esquerda
    int p2 = middle+1; // "Apontador" do array da metade direita
    int cur = 0; // "Apontador" do array aux[] a conter juncao
    while (p1 <= middle && p2 <= end) { // Enquanto der para comparar
        if (v[p1] <= v[p2]) aux[cur++] = v[p1++]; // Escolher menor
        else aux[cur++] = v[p2++]; // e adicionar
    }
    while (p1 <= middle) aux[cur++] = v[p1++]; // Adicionar o que resta
    while (p2 <= end) aux[cur++] = v[p2++];
    // Copiar array aux[] para v[]
    for (int i=0; i<cur; i++) v[start+i] = aux[i];
}
```





- Os erros mais comuns com recursividade são:
  - ▶ O **caso base foi esquecido**, ou nem todos os casos base foram tratados
  - ▶ O caso recursivo não é aplicado a casos mais pequenos, e por isso a **recursão não converge**
- Em ambos os casos a recursão fica **"infinita"** e a função vai esgotar a memória até obter um erro de *Stack Overflow*

Nota: uma recursão usa "internamente" uma pilha (stack) para guardar o estado das chamadas anteriores  
(quando sai de uma chamada, regressa à última chamada antes dessa)

# Recursividade: invertendo um array

- O mais "complicado" é escolher a divisão recursiva ajustada ao problema
- Vejamos mais um caso: como **inverter o conteúdo de um array**?  
Exemplo: [1, 2, 3, 4, 5] → [5, 4, 3, 2, 1]
  - ▶ Se trocarmos o primeiro com o último elemento... fica apenas a faltar **inverter o resto**
  - ▶ O **caso base** é qualquer array de tamanho inferior a 2: o array invertido é igual a ele
  - ▶ Vamos assumir que estamos a inverter entre posições *start* e *end*

```
void reverse(int v[], int start, int end) {  
    if (start >= end) return; // Caso base: array de tamanho < 2  
    int tmp = v[start]; // Trocar primeiro com último  
    v[start] = v[end];  
    v[end] = tmp;  
    reverse(v, start+1, end-1); // Chamada recursiva para o resto  
}
```

# Recursividade: flood fill

- Pode dar jeito ter mais do que duas chamadas recursivas
- Considere uma matriz onde duas células são *vizinhas* se são adjacentes *vertical* ou *horizontalmente*
- Uma **mancha** é um conjunto de células vizinhas não vazias. Por exemplo, na figura seguinte, temos 3 manchas:
  - ▶ Uma mancha **vermelha** com 6 células
  - ▶ Uma mancha **verde** com 4 células
  - ▶ Uma mancha **azul** com 3 células

#	#	.	#	.	.	.
.	#	#	#	.	.	.
.	.	.	.	.	#	#
.	#	.	.	.	#	#
#	#	.	.	.	.	.

- Como calcular o **tamanho de uma mancha**?

# Recursividade: flood fill

- Definição recursiva:

- ▶ Seja  $m[L][C]$  a matriz de células com **L** linhas e **C** colunas
- ▶ Seja  $t(y,x)$  o tamanho da mancha na posição  $(y,x)$
- ▶ Se  $m[y][x]$  for célula vazia, então  $t(y,x) = 0$   
Caso contrário,  $t(y,x) = 1 + t(y+1,x) + t(y-1,x) + t(y,x+1) + t(y,x-1)$

Uma implementação **incorrecta**:

```
// Estamos a assumir que m[][], L e C são variáveis globais
int t(int y, int x) {
    if (m[y][x] == '.') return 0; // Caso base: célula vazia
    int count = 1;                // célula não vazia
    count += t(y-1, x);           // Adicionando células não vizinhas
    count += t(y+1, x);
    count += t(y, x+1);
    count += t(y, x-1);
    return count;
}
```

- Problemas desta implementação? **Limites da matriz!**

ex:  $t(0,0)$  vai chamar  $t(-1,0)$ , que tenta aceder a uma posição fora dos limites da matriz

# Recursividade: flood fill

- Uma implementação ainda **incorrecta**:

```
// Estamos a assumir que m[][], L e C são variáveis globais
int t(int y, int x) {
    if (y<0 || y>=L || x<0 || x>=C) return 0; // Caso base: fora dos limites
    if (m[y][x] == '.') return 0; // Caso base: célula vazia
    int count = 1; // célula não vazia
    count += t(y-1, x); // Adicionando células não vizinhas
    count += t(y+1, x);
    count += t(y, x+1);
    count += t(y, x-1);
    return count;
}
```

- Problemas desta implementação? **Recursão infinita!**  
ex: t(0,0) chama t(1,0), que chama t(0,0), que chama t(0,1), que chama t(0,0), que chama t(0,1), ...
- Precisamos de garantir que não voltamos a uma célula que já visitamos

# Recursividade: flood fill

- Uma implementação **correcta**

- ▶ `visited[L][C]` é uma matriz de booleanos inicialmente com tudo a *false*

```
// Estamos a assumir que m[][], L, C e visited[][] são variáveis globais
int t(int y, int x) {
    if (y<0 || y>=L || x<0 || x>=C) return 0; // Caso base: fora dos limites
    if (visited[y][x]) return 0; // Caso base: célula já visitada
    if (m[y][x] == '.') return 0; // Caso base: célula vazia
    int count = 1; // célula não vazia
    visited[y][x] = true;
    count += t(y-1, x); // Adicionando células não vizinhas
    count += t(y+1, x);
    count += t(y, x+1);
    count += t(y, x-1);
    return count;
}
```

# Recursividade: gerando subconjuntos

- Como **gerar todos os subconjuntos** de um dado conjunto?  
Exemplo:  $\{1,2,3\}$  tem 8 subconjuntos:
  - ▶  $\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{\}$
- **Definição recursiva?** Subconjuntos de  $\{1,2,3\}$  são:
  - ▶  $\{1\} \cup$  subconjuntos de  $\{2,3\}$ :  $\{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1\}$   
e
  - ▶  $\{\}$   $\cup$  subconjuntos de  $\{2,3\}$ :  $\{2,3\}, \{2\}, \{3\}, \{\}$
- Dito de outro modo, o 1º elemento ou está no conjunto ou não está, e para cada um destes casos, temos todos os subconjuntos do "resto"

# Recursividade: gerando subconjuntos

- Seja a inclusão no conjunto representada por array de booleanos:  
Exemplos:  $[T, T, T]$  representa  $\{1, 2, 3\}$ ;  $[T, T, F]$  representa  $\{1, 2\}$
- Então todos os subconjuntos são:
  - ▶ Arrays onde a 1ª posição é **T** + todos os subconjuntos seguintes mais
  - ▶ Arrays onde a 1ª posição é **F** + todos os subconjuntos seguintes

$$[T, T, T] = \{1, 2, 3\}$$

$$[T, T, F] = \{1, 2\}$$

$$[T, F, T] = \{1, 3\}$$

$$[T, F, F] = \{1\}$$

$$[F, T, T] = \{2, 3\}$$

$$[F, T, F] = \{2\}$$

$$[F, F, T] = \{3\}$$

$$[F, F, F] = \{\}$$



# Recursividade: gerando subconjuntos

- Implementando:

```
// Escrever todos os subconjuntos do array v[]
void sets(int v[]) {
    // array de booleanos para representar o conjunto
    boolean used[] = new boolean[v.length];
    goSets(0, v, used); // chamar função recursiva
}

// Gera todos os subconjuntos a partir da posição 'cur'
void goSets(int cur, int v[], boolean used[]) {
    if (cur == v.length) { // Caso base: terminamos o conjunto
        for (int i=0; i<v.length; i++) // Escrever conjunto
            if (used[i]) System.out.print(v[i] + " ");
        System.out.println();
    } else { // Se não terminamos, continuar a gerar
        used[cur] = true; // Subconjuntos que incluem o elemento actual
        goSets(cur+1, v, used); // Chamada recursiva
        used[cur] = false; // Subconjuntos que não incluem o el. actual
        goSets(cur+1, v, used); // Chamada recursiva
    }
}
```

# Recursividade: gerando permutações

- Como gerar todas as **permutações** de um array?  
Exemplo: 6 permutações de [1,2,3]: 123, 132, 213, 231, 312, 321
- **Definição recursiva?** Permutações de [1,2,3] são:
  - ▶ 1 seguido das permutações de [2,3]  
e
  - ▶ 2 seguido das permutações de [1,3]  
e
  - ▶ 3 seguido das permutações de [1,2]
- Dito de outro modo, o 1<sup>o</sup> elemento da permutação pode ser qualquer um dos elementos do array e para cada um desses casos temos de permutar o "resto"

# Recursividade: gerando permutações

- Implementando:

```
// Escrever todos as permutações do array v[]
void permutations(int v[]) {
    boolean used[] = new boolean[v.length]; // i está na permutação?
    int perm[] = new int[v.length];        // permutação actual
    goPerm(0, v, used, perm); // chamar função recursiva
}

// Gera todas as permutacoes a partir da posição 'cur'
void goPerm(int cur, int v[], boolean used[], int perm[]) {
    if (cur == v.length) { // Caso base: terminamos a permutação
        for (int i=0; i<v.length; i++) // Escrever a permutação
            System.out.print(v[perm[i]] + " ");
        System.out.println();
    } else { // Se não terminamos, continuar a gerar
        for (int i=0; i<v.length; i++) // Tentar todos os elementos
            if (!used[i]) {
                used[i] = true; perm[cur] = i;
                goPerm(cur+1, v, used, perm);
                used[i] = false;
            }
    }
}
```