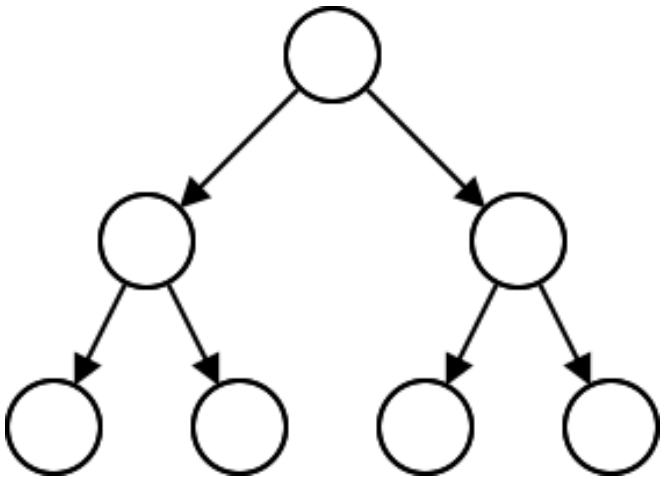
Árvores Binárias

Pedro Ribeiro

DCC/FCUP

2022/2023



(baseado e/ou inspirado parcialmente nos slides de Luís Lopes e de Fernando Silva)

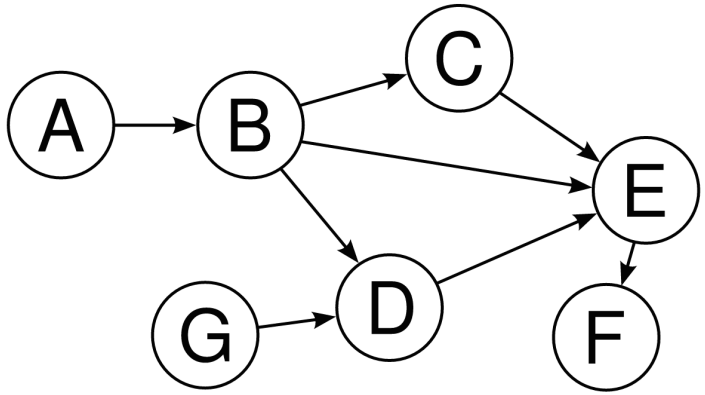
Estruturas não lineares

Os arrays e as listas são exemplos de estruturas de dados **lineares**.
Cada elemento tem:

- um predecessor único (excepto o primeiro elemento da lista);
- um sucessor único (excepto o último elemento da lista).

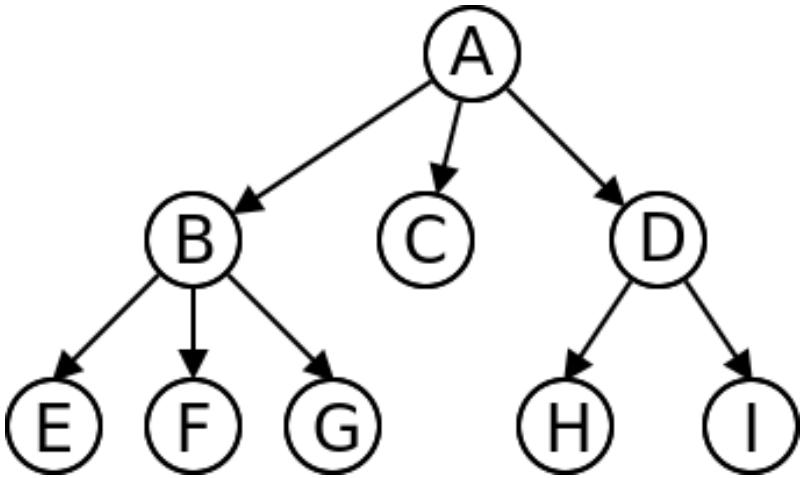
Existem outros tipos de estruturas?

- um **grafo** é uma estrutura de dados **não-linear**, pois cada um dos seus elementos, designados por nós, pode ter mais do que um predecessor ou mais do que um sucessor.



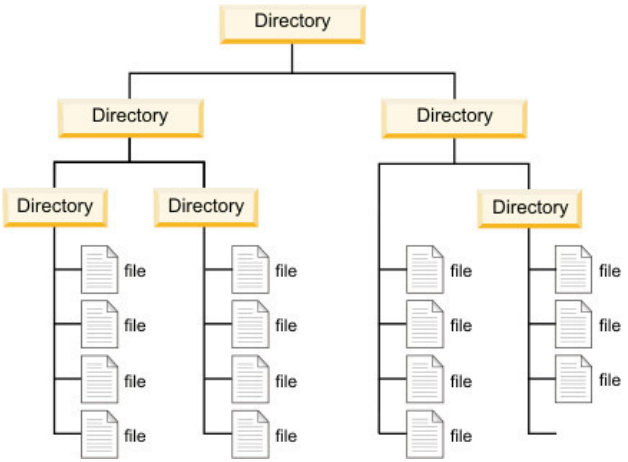
Árvores

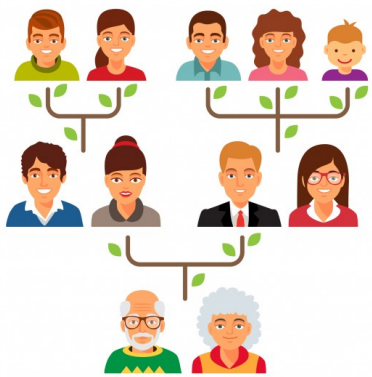
- Uma **árvore** é um tipo específico de grafo
- cada elemento, designado por **nó**, tem zero ou mais sucessores, mas apenas um predecessor (excepto o primeiro nó, a que se dá o nome de **raíz** da árvore);
- Um exemplo de árvore:

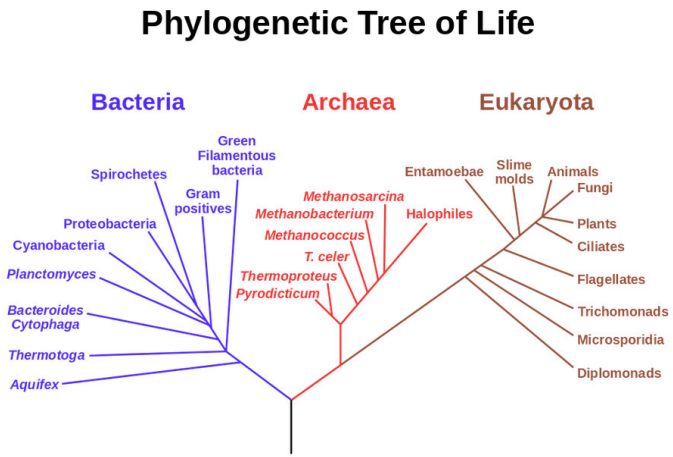


Árvores - Exemplos

- As árvores são estruturas particularmente adequadas para representar informação organizada em **hierarquias**:
- Alguns exemplos:
  - a estrutura de directórios (ou pastas) de um sistema de ficheiros
  - uma árvore genealógica de uma família
  - uma árvore da vida

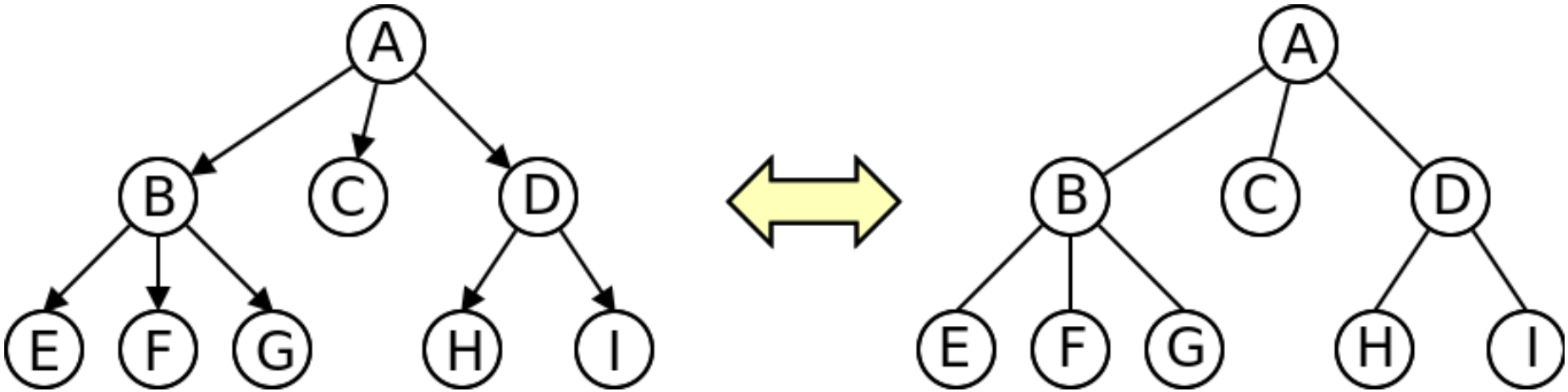




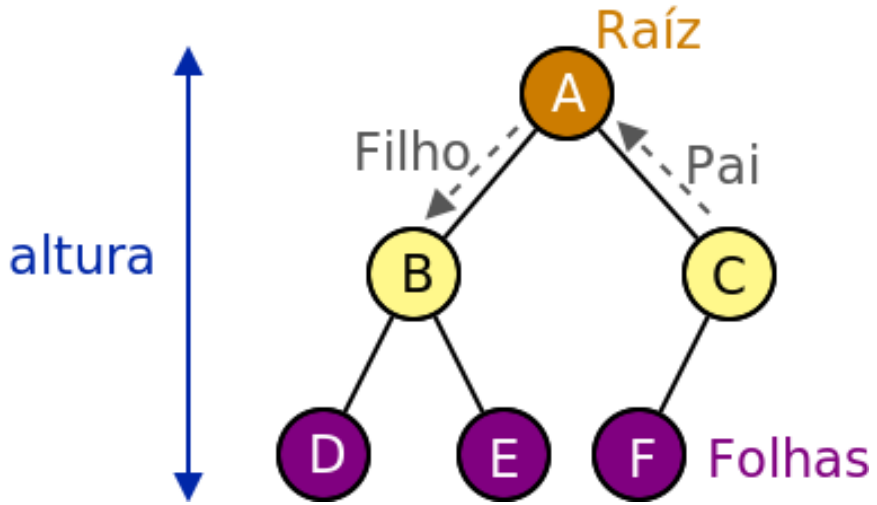


Árvores - Visualização

- Muitas vezes não se incluem as *"setas"* nos arcos (ou ligações) pois fica claro pelo desenho quais nós descendem de quais:

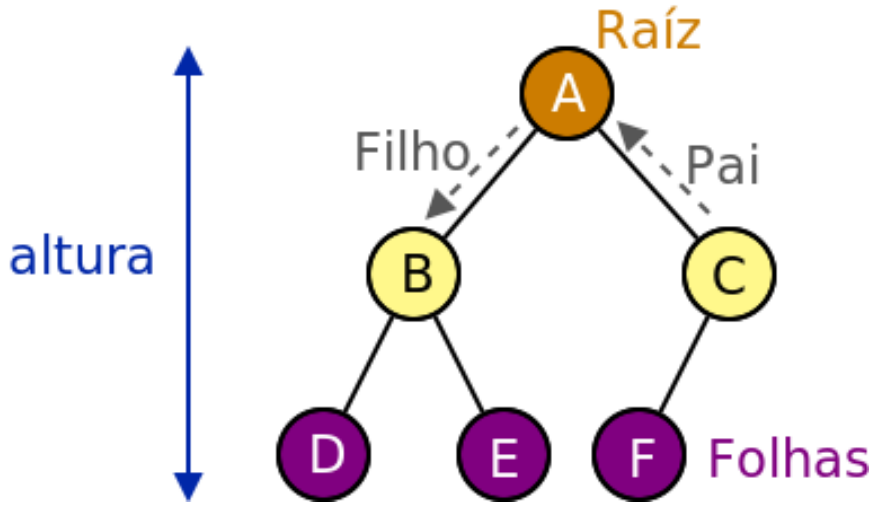


Árvores - Terminologia



- Ao predecessor (único) de um nó, chamamos **pai**
  - *Exemplo: O pai de B é A; o pai de C também é A*
- Os sucessores de um nó são os seus **filhos**
  - *Exemplo: Os filhos de A são B e C*
- O **grau** de um nó é o seu número de filhos
  - *Exemplo: A tem 2 filhos, C tem 1 filho*
- Uma **folha** é um nó sem filhos, ou seja, de grau 0
  - *Exemplo: D, E e F são nós folha*
- A **raiz** é o único nó sem pai
- Uma **subárvore** é um subconjunto de nós (ligados) da árvore
  - *Exemplo: {B,D,E} são uma sub-árvore*

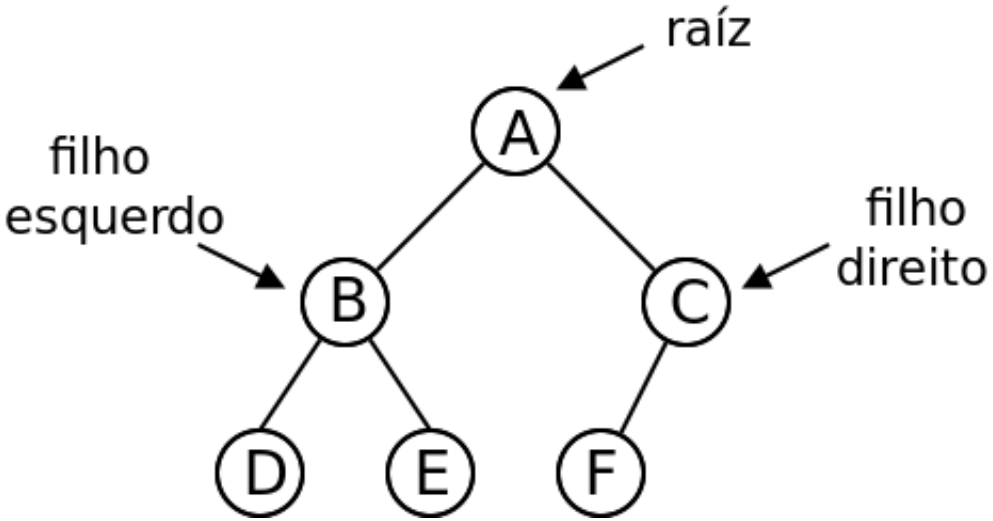
Árvores - Terminologia



- Os arcos que ligam os nós, chamam-se **ramos**
- Chama-se **caminho** à sequência de ramos entre dois nós
  - *Exemplo: A-B-D é o caminho entre A e D*
- O **comprimento** de um caminho é o número de ramos nele contido;
  - *Exemplo: A-B-D tem comprimento 2*
- A **profundidade** de um nó é o comprimento do caminho desde a raíz até esse nó (a profundidade da raiz é zero);
  - *Exemplo: B tem profundidade 1, D tem profundidade 2*
- A **altura** de uma árvore é a profundidade máxima de um nó da árvore
  - *Exemplo: A árvore da figura tem altura 2*

Árvores Binárias

- A **aridade** de uma árvore é o grau máximo de um nó
- Uma **árvore binária** é uma árvore de aridade 2, isto é, cada nó possui no máximo dois filhos, designados por filho **esquerdo** e **direito**.



Árvores Binárias - Implementação

- Vamos então implementar uma árvore binária **genérica** (valores podem ser inteiros, strings ou qualquer outro tipo de objecto)
- Começemos por definir um **nó da árvore**:

```
class BTNode<T> {
   private T value;          // Valor guardado no nó
   private BTNode<T> left;   // Filho esquerdo
   private BTNode<T> right; // Filho direito

   // Construtor
   BTNode(T v, BTNode<T> l, BTNode<T> r) {
      value = v; left = l; right = r;
   }

   // Getters e Setters
   public T getValue() {return value;}
   public BTNode<T> getLeft() {return left;}
   public BTNode<T> getRight() {return right;}
   public void setValue(T v) {value = v;}
   public void setLeft(BTNode<T> l) {left = l;}
   public void setRight(BTNode<T> r) {right = r;}
}
```

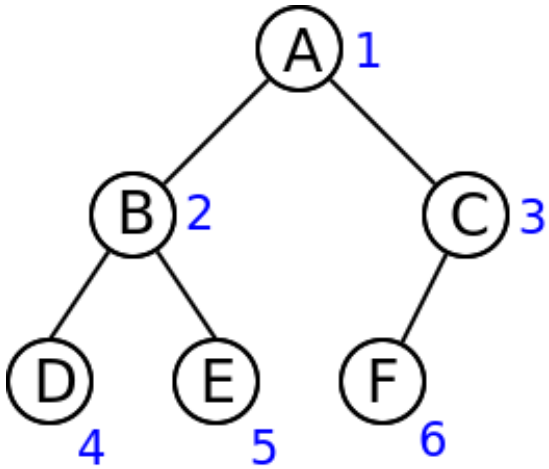
Árvores Binárias - Implementação

- Vamos agora definir a **árvore** em si
- Do mesmo modo que uma lista ligada tem uma referência para o primeiro nó da lista, uma árvore deve ter uma referência para... a **raíz**!

```
public class BTree<T> {
    private BTNode<T> root; // raíz da árvore

    // Construtor
    BTree() {
        root = null;
    }

    // Getter e Setter para a raíz
    public BTNode<T> getRoot() {return root;}
    public void setRoot(BTNode<T> r) {root = r;}

    // Verificar se árvore está vazia
    public boolean isEmpty() {
        return root == null;
    }
}
```

Árvores Binárias - Número de nós

- Vamos criar alguns **métodos** para colocar na classe `BTree<T>`
- Um primeiro método tem como objectivo **contar o número de nós** de uma árvore. Por exemplo, a árvore binária seguinte tem 6 nós:



- Vamos criar um método **recursivo**:
  - **Caso base:** quando a árvore está vazia... tem 0 nós!
  - **Caso recursivo:** o nº nós numa árvore não vazia é igual a 1 mais o nº nós da subárvore esquerda, mais o nº nós da subárvore direita
    - ★ *Exemplo fig.: num_nós = 1 + num_nos({B,D,E}) + num_nos({C,F})*

Árvores Binárias - Número de nós

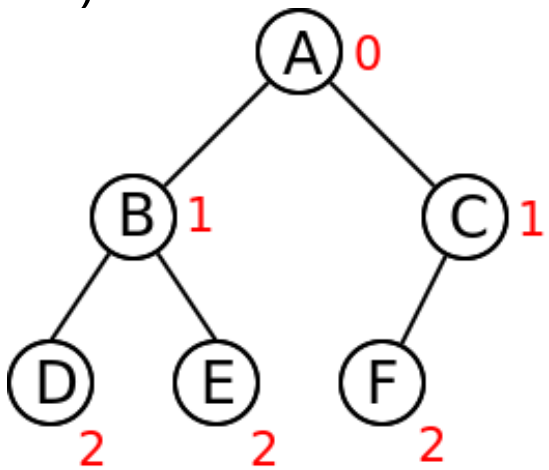
- Precisamos de começar a contar... a partir da raíz!
- Queremos ter um método `numberNodes()` na classe `BTree<T>`
  - *Exemplo: se t for uma árvore queremos poder chamar t.numberNodes()*
- Vamos usar um **método auxiliar** (privado) que é recursivo

```
// Método principal (público)
public int numberNodes() {
    return numberNodes(root);
}

// Método auxiliar (privado)
private int numberNodes(BTNode<T> n) {
    if (n == null) return 0;
    return 1 + numberNodes(n.getLeft()) + numberNodes(n.getRight());
}
```

- Este **padrão** *(método principal que chama método auxiliar recursivo a partir da raíz)* pode ser usado para muitos tipos de métodos
- Vamos ver mais alguns exemplos...

Árvores Binárias - Altura de uma árvore

- Vamos calcular a **altura de uma árvore** (profundidade máxima de um nó). Por exemplo, a árvore da figura tem altura 2 (a vermelho a profundidade de cada nó).



- Vamos criar um método **recursivo** muito parecido com o anterior:
  - **Caso recursivo:** a altura de uma árvore é igual 1 mais o máximo entre as alturas das subárvores esquerda e direita
    - ★ *Exemplo fig.: altura = 1 + max(altura({B,D,E}), altura({C,F}))*
- Qual deverá ser o **caso base**? Duas hipóteses:
  - Podemos parar numa folha: tem altura zero (0)
  - Se pararmos numa árvore nula, a altura tem de ser... **-1**
    - ★ *Ex: altura árvore de 1 nó = 1 + max(null, null) = 1 + max(-1, -1) = 0*

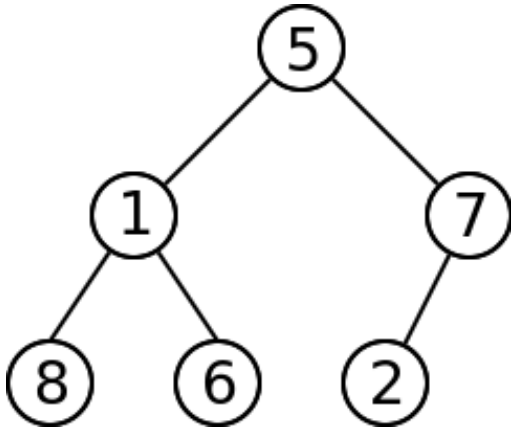
Árvores Binárias - Altura de uma árvore

- Concretizando, com caso base da recursão do método auxiliar a ser a árvore nula (como no método do número de nós):

```
public int depth() {
    return depth(root);
}

private int depth(BTNode<T> n) {
    if (n == null) return -1;
    return 1 + Math.max(depth(n.getLeft()), depth(n.getRight()));
}
```

Árvores Binárias - Procura de um elemento

- Vamos agora ver um método para **verificar se um elemento está ou não contido numa árvore**. Por exemplo, a árvore da figura seguinte contém o número 2, mas não contém o número 3:



- Vamos criar um método **recursivo** muito parecido com os anteriores:
  - **Caso base 1:** se a árvore é vazia, então não contém o valor que procuramos e devolvemos *false*
  - **Caso base 2:** se valor que procuramos está na raíz da árvore, então devolvemos *true*
  - **Caso recursivo:** se não está na raíz, então verificamos se está na subárvore esquerda **OU** na subárvore direita.

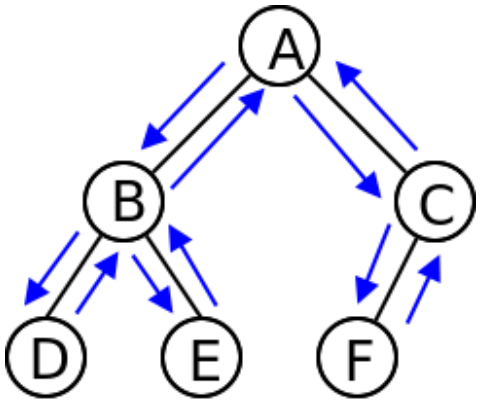
Árvores Binárias - Procura de um elemento

- Concretizando, e recordando que para comparar objectos devem usar o *.equals()* e não o ==:

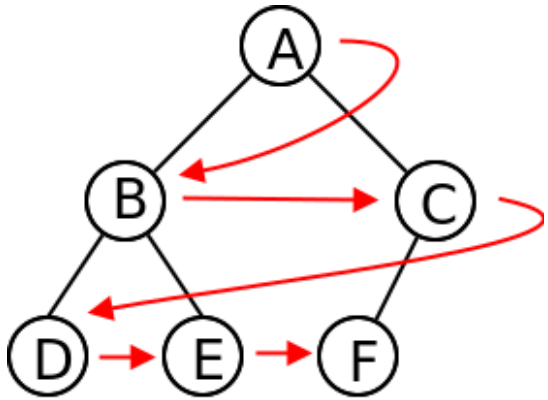
```
public boolean contains(T value) {
   return contains(root, value);
}

private boolean contains(BTNode<T> n, T value) {
   if (n==null) return false;
   if (n.getValue().equals(value)) return true;
   return contains(n.getLeft(), value) ||
          contains(n.getRight(), value);
}
```

Árvores Binárias - Escrita dos nós de uma árvore

- Como **escrever o conteúdo (os nós)** de uma árvore?
- Temos de **passar por todos os nós**. Mas por qual **ordem**?
- Vamos distinguir entre duas ordens diferentes:



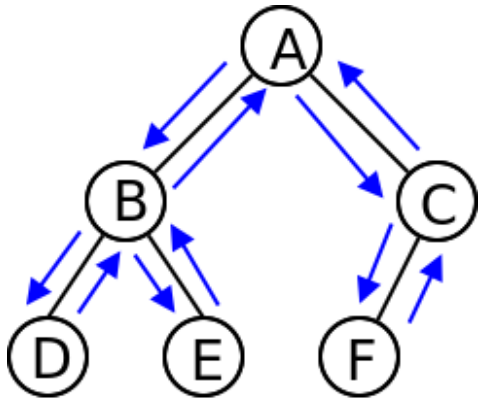
Pesquisa em Profundidade



Pesquisa em Largura

- **Pesquisa em Profundidade** (DFS*: depth-first-search*): visitar todos os nós da subárvore de um filho antes de visitar a subárvore do outro filho
- **Pesquisa em Largura** (BFS*: breadth-first-search*): visitar nós por ordem crescente de profundidade

Árvores Binárias - Pesquisa em profundidade



Pesquisa em Profundidade

- Se escrevermos o nó da primeira vez que lá passamos, obtemos o seguinte para a figura: **A B D E C F**
- Isto equivale a fazer o seguinte:
  1. Escrever raíz
  2. Escrever toda a subárvore esquerda
  3. Escrever toda a subárvore direita
- Isto pode ser directamente convertido num **método recursivo**!

Árvores Binárias - Pesquisa em profundidade

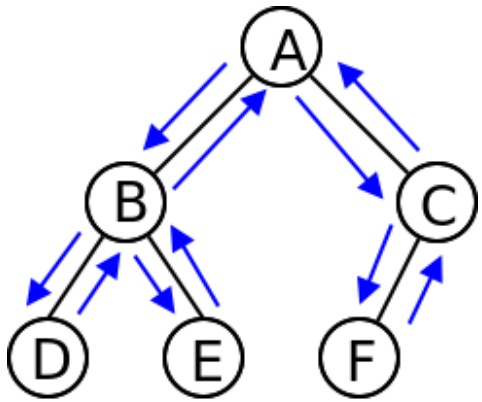
- Concretizando em código o que foi dito no slide anterior:

```
public void printPreOrder() {
    System.out.print("PreOrder:");
    printPreOrder(root);
    System.out.println();
}

private void printPreOrder(BTNode<T> n) {
    if (n==null) return;
    System.out.print(" " + n.getValue() );
    printPreOrder(n.getLeft());
    printPreOrder(n.getRight());
}
```

- Para a árvore anterior, iria ser escrito *"PreOrder: A B D E C F"*
- Chamamos a esta ordem **PreOrder**, porque escrevemos a raíz antes das duas subárvores

Árvores Binárias - Pesquisa em profundidade

- Para além da **PreOrder**, podemos considerar também mais duas ordens em profundidade:
  - **InOrder:** raíz escrita *entre* as duas subárvores
  - **PostOrder:** raíz escrita *depois* das duas subárvores



Pesquisa em Profundidade

- Para a árvore da figura:
  - **PreOrder:** A B D E C F
  - **InOrder:** D B E A F C
  - **PostOrder:** D E B F C A

Árvores Binárias - Pesquisa em profundidade

- Implementando a *InOrder*:

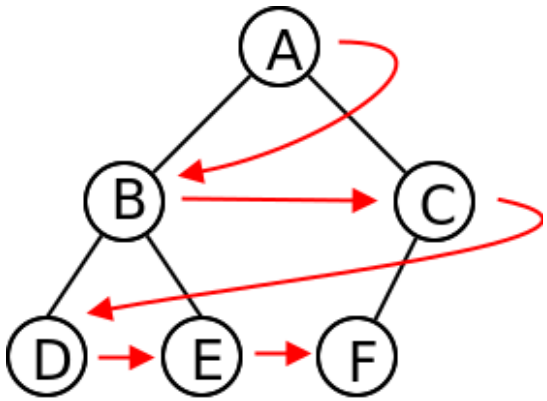
```
public void printInOrder() {
    System.out.print("InOrder:");
    printInOrder(root);
    System.out.println();
}

private void printInOrder(BTNode<T> n) {
    if (n==null) return;
    printInOrder(n.getLeft());
    System.out.print(" " + n.getValue());
    printInOrder(n.getRight());
}
```

Árvores Binárias - Pesquisa em profundidade

- Implementando a *PostOrder*:

```
public void printPostOrder() {
    System.out.print("PostOrder:");
    printPostOrder(root);
    System.out.println();
}

private void printPostOrder(BTNode<T> n) {
    if (n==null) return;
    printPostOrder(n.getLeft());
    printPostOrder(n.getRight());
    System.out.print(" " + n.getValue());
}
```

Árvores Binárias - Pesquisa em largura

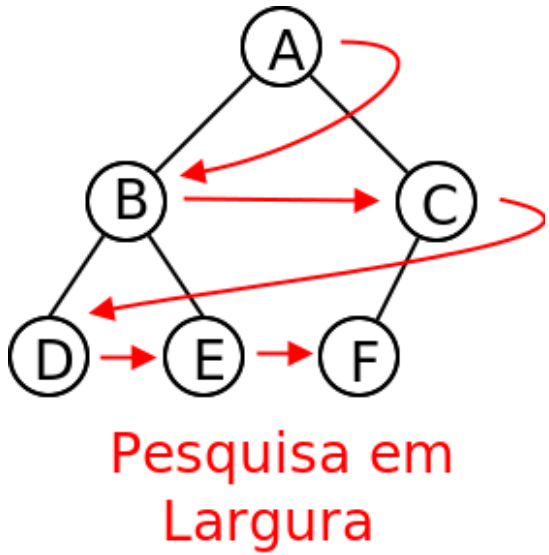


Pesquisa em Largura

- Para visitar em largura vamos usar o **TAD fila**
  1. Inicializar uma fila Q adicionando a raíz
  2. Enquanto *Q* não estiver vazia:
  3. Retirar primeiro elemento *cur* da fila
  4. Escrever *cur*
  5. Adicionar filhos de *cur* ao fim da fila

Árvores Binárias - Pesquisa em largura

- Vejamos um exemplo:



1. Inicialmente temos que $Q = \{A\}$
2. Retiramos e escrevemos **A**, adicionamos filhos B e C: $Q = \{B, C\}$
3. Retiramos e escrevemos **B**, adicionamos filhos D e E: $Q = \{C, D, E\}$
4. Retiramos e escrevemos **C**, adicionamos filho F: $Q = \{D, E, F\}$
5. Retiramos e escrevemos **D**, não tem filhos: $Q = \{E, F\}$
6. Retiramos e escrevemos **E**, não tem filhos: $Q = \{F\}$
7. Retiramos e escrevemos **F**, não tem filhos: $Q = \{\}$

Árvores Binárias - Pesquisa em largura

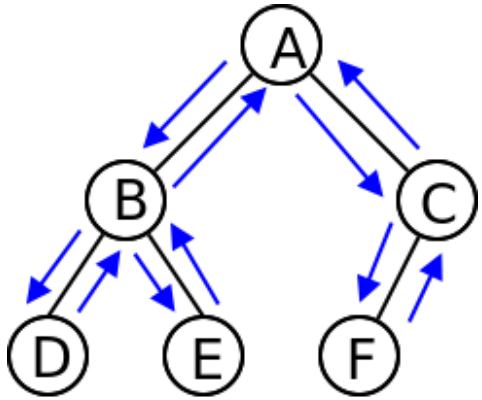
- Concretizando em código:
  (Nota: vamos usar a nossa implementação de filas, mas poderíamos também ter usado as filas do Java)

```
public void printBFS() {
    System.out.print("BFS:");

    MyQueue<BTNode<T>> q = new LinkedListQueue<BTNode<T>>();
    q.enqueue(root);
    while (!q.isEmpty()) {
        BTNode<T> cur = q.dequeue();
        if (cur != null) {
            System.out.print(" " + cur.getValue());
            q.enqueue(cur.getLeft());
            q.enqueue(cur.getRight());
        }
    }
    System.out.println();
}
```

- Nesta versão deixamos *null* entrar na fila, mas depois ignoramos. Também poderíamos só ter adicionado se não fosse *null*.

Árvores Binárias - BFS vs DFS

- Se em vez de uma **fila** Q (*FIFO*) tivéssemos usado uma **pilha** S (*LIFO*), em vez de BFS estaríamos a fazer... um DFS!



Pesquisa em Profundidade

1. Inicialmente temos que $S = \{A\}$
2. *pop* e escrita de **A**, push de filhos B e C: $S = \{B, C\}$
3. *pop* e escrita de **C**, push do filho F: $S = \{B, F\}$
4. *pop* e escrita de **F**, não tem filhos: $S = \{B\}$
5. *pop* e escrita de **B**, push de filhos B e C: $S = \{D, E\}$
6. *pop* e escrita de **E**, não tem filhos: $S = \{D\}$
7. *pop* e escrita de **D**, não tem filhos: $S = \{\}$

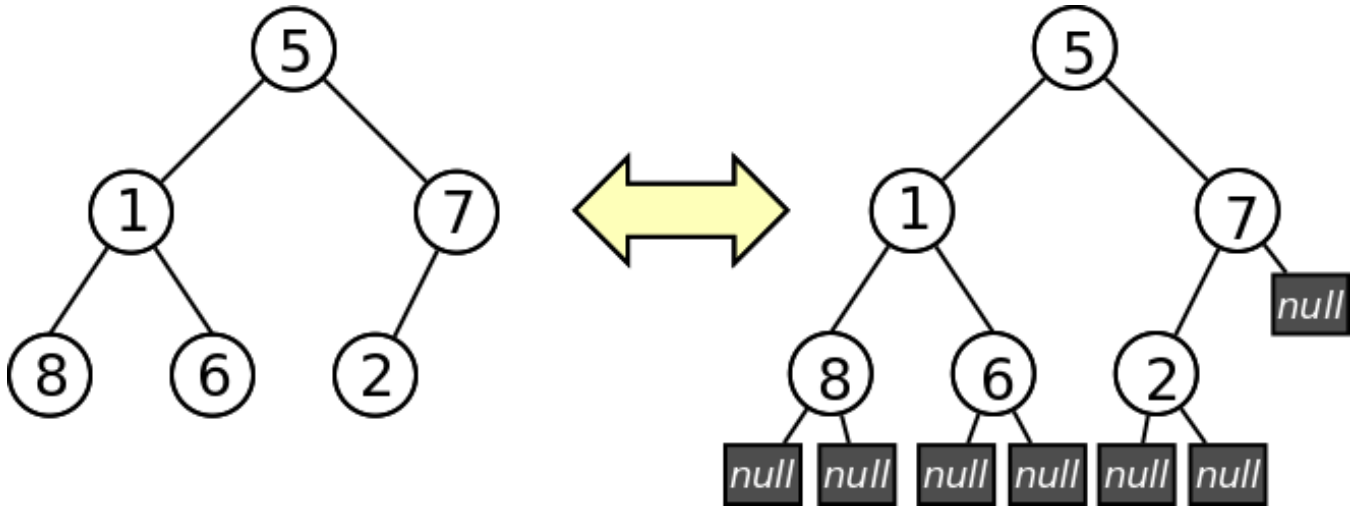
Árvores Binárias - Pesquisa em profundidade

- Concretizando em código:
  (Nota: vamos usar a nossa implementação de pilhas, mas poderíamos também ter usado as pilhas do Java)

```
public void printDFS() {
    System.out.print("DFS:");

    MyStack<BTNode<T>> q = new LinkedListStack<BTNode<T>>();
    q.push(root);
    while (!q.isEmpty()) {
        BTNode<T> cur = q.pop();
        if (cur != null) {
            System.out.print(" " + cur.getValue());
            q.push(cur.getLeft());
            q.push(cur.getRight());
        }
    }
    System.out.println();
}
```

Árvores Binárias - Leitura PreOrder

- Como **ler uma árvore**?
- Uma hipótese é usar **PreOrder**, representando explicitamente os *nulls*
- Note que as duas representações seguintes referem-se à mesma árvore:

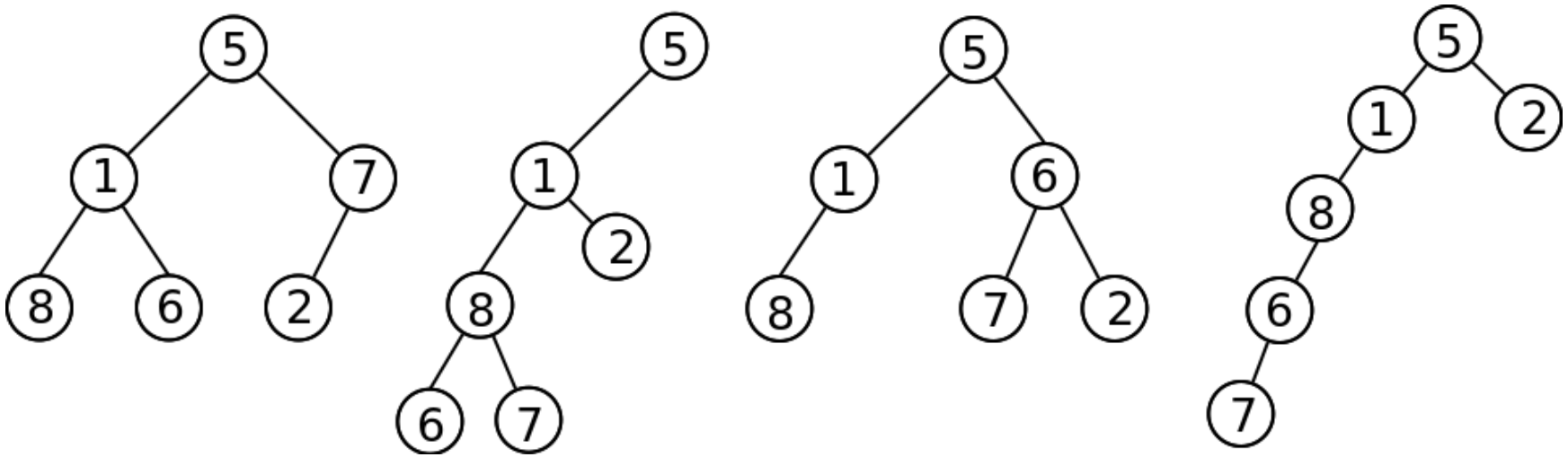


- Se representarmos *null* por **N**, então a árvore em *PreOrder* ficaria representada por:

```
5 1 8 N N 6 N N 7 2 N N N
```

Árvores Binárias - Leitura PreOrder

- Note como os *nulls* são necessários.
- Ex: sem *nulls*, a seguinte representação inorder podia referir-se a qualquer uma das 4 árvores (entre outras): `5 1 8 6 7 2`



- Com os *nulls*, as 4 árvores ficam diferentes:
  - 1ª Árvore: `5 1 8 N N 6 N N 7 2 N N N`
  - 2ª Árvore: `5 1 8 6 N N 7 N N 2 N N N`
  - 3ª Árvore: `5 1 8 N N N 6 7 N N 2 N N`
  - 4ª Árvore: `5 1 8 6 7 N N N N N 2 N N`

Árvores Binárias - Leitura PreOrder

- Implementando em código (numa classe utilitária com métodos estáticos) uma leitura preorder de uma árvore de inteiros:

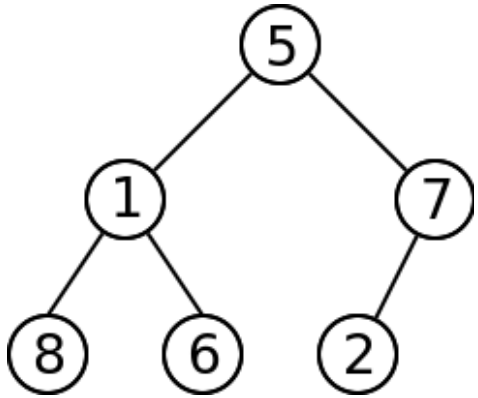
```
import java.util.Scanner;

class LibBTree {
   public static BTree<Integer> readIntTree(Scanner in) {
      BTree<Integer> t = new BTree<Integer>();
      t.setRoot(readIntNode(in));
      return t;
   }

   private static BTNode<Integer> readIntNode(Scanner in) {
      String s = in.next();
      if (s.equals("N")) return null;
      Integer value = Integer.parseInt(s);
      BTNode<Integer> left = readIntNode(in);
      BTNode<Integer> right = readIntNode(in);
      return new BTNode<Integer>(value, left, right);
   }
}
```

Árvores Binárias - Testando tudo o que fizemos

- Testando tudo o que foi implementado:

```
import java.util.Scanner;

class TestBTree {
   public static void main(String[] args) {
      Scanner in = new Scanner(System.in);
      BTree<Integer> t = LibBTree.readIntTree(in);

      System.out.println("numberNodes = " + t.numberNodes());
      System.out.println("depth = " + t.depth());
      System.out.println("contains(2) = " + t.contains(2));
      System.out.println("contains(3) = " + t.contains(3));

      t.printPreOrder();
      t.printInOrder();
      t.printPostOrder();
      t.printBFS();
      t.printDFS();
   }
}
```

Árvores Binárias - Testando tudo o que fizemos



- Chamando com o input da árvore da figura colocado num ficheiro `input.txt`

```
5 1 8 N N 6 N N 7 2 N N N
```

- `java TestBTree < input.txt` daria como resultado:

```
numberNodes = 6
depth = 2
contains(2) = true
contains(3) = false
PreOrder: 5 1 8 6 7 2
InOrder: 8 1 6 5 2 7
PostOrder: 8 6 1 2 7 5
BFS: 5 1 7 8 6 2
DFS: 5 7 2 1 6 8
```

Árvores Binárias - Complexidade dos métodos

- Qual a **complexidade temporal** dos métodos que implementamos?
  - numberNodes()
  - depth()
  - contains()
  - printPreOrder()
  - printInOrder()
  - printPostOrder()
  - printBFS()
  - printDFS()
  - readIntTree(Scannner in)
- Todos eles passam uma única vez por cada nó da árvore (para *contains() esse é o pior caso, nos outros métodos é sempre assim*), e gastam um número constante de operações nesse nó.
- Todos estes métodos têm portanto complexidade linear $\mathcal{O}(n)$, onde n é o número de nós da árvore
- Será possível melhorar esta complexidade?
  Árvores Binárias de Pesquisa

Árvores Binárias de Pesquisa - Motivação

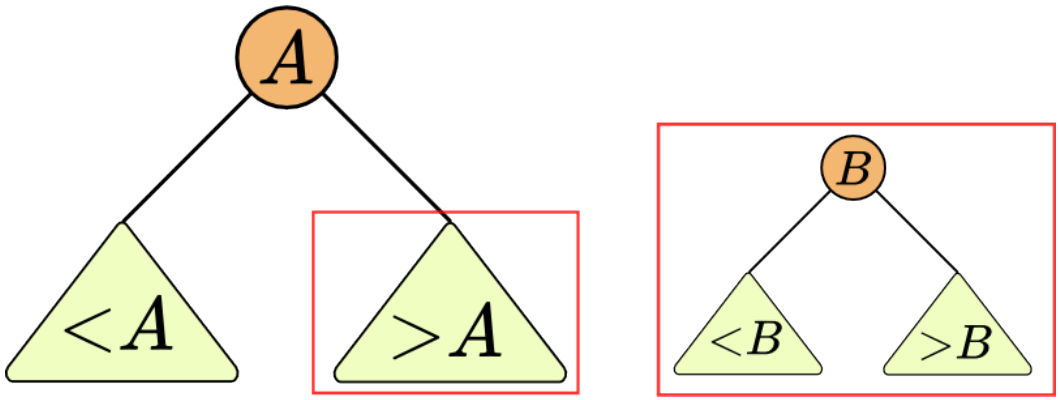
- Seja S um conjunto de objectos/itens **"comparáveis"**:
  - Sejam a e b dois objectos.
    São "comparáveis" se for possível dizer se $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.
  - Um exemplo seriam números, mas poderiam ser outra coisa (alunos com um nome e nº mecanográfico; equipas com pontos, golos marcados e sofridos, ...)

- Alguns possíveis **problemas** de interesse:
  - Dado um conjunto S, determinar se **um dado item está em** S
  - Dado um conjunto S **dinâmico** (que sofre alterações: adições e remoções), determinar se **um dado item está em** S
  - Dado um conjunto S **dinâmico** determinar **o maior/menor** item de S
  - **Ordenar** um conjunto S
  - ...

- **Árvores Binárias de Pesquisa!**

Árvores Binárias de Pesquisa - Conceito

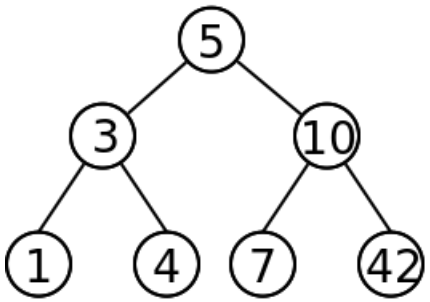
- Para **todos** os nós da árvore, deve acontecer o seguinte:
  o nó é maior que todos os nós da sua subárvore esquerda e menor que todos os nós da sua subárvore direita



Árvores Binárias de Pesquisa - Exemplos

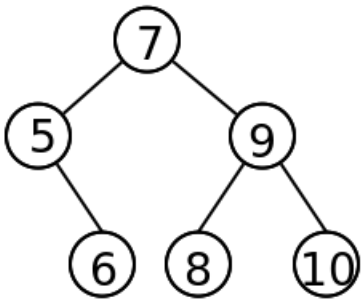
- Para **todos** os nós da árvore, deve acontecer o seguinte:
  o nó é maior que todos os nós da sua subárvore esquerda e menor que todos os nós da sua subárvore direita

Árvore 1



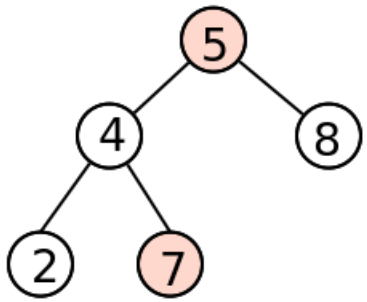
Árvore Binária de Pesquisa

Árvore 2



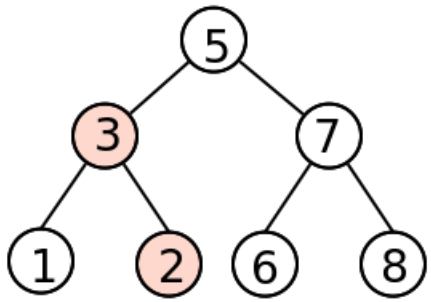
Árvore Binária de Pesquisa

Árvore 3



Não é Árvore Binária de Pesquisa

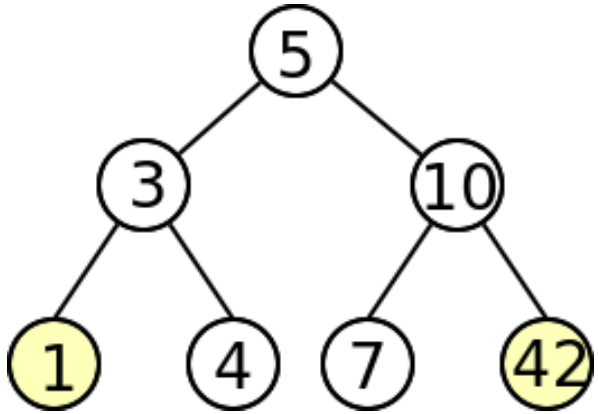
Árvore 4



Não é Árvore Binária de Pesquisa

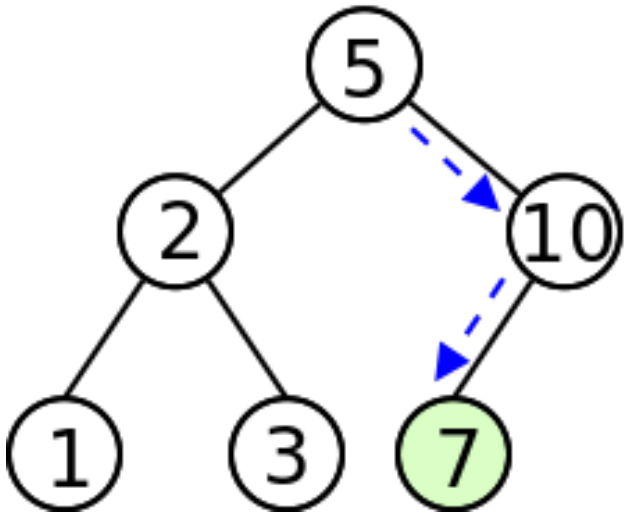
- Nas árvores 1 e 2 as condições são respeitadas
- Na árvore 3 o nó 7 está à esquerda do nó 5 mas $7 > 5$
- Na árvore 4 o nó 2 está à direito do nó 3 mas $2 < 3$

Árvores Binárias de Pesquisa
Algumas consequências



- O **menor** elemento de todos está... no **nó mais à esquerda**
- O **maior** elemento de todos está... no **nó mais à direita**

Árvores Binárias de Pesquisa - Pesquisar um valor

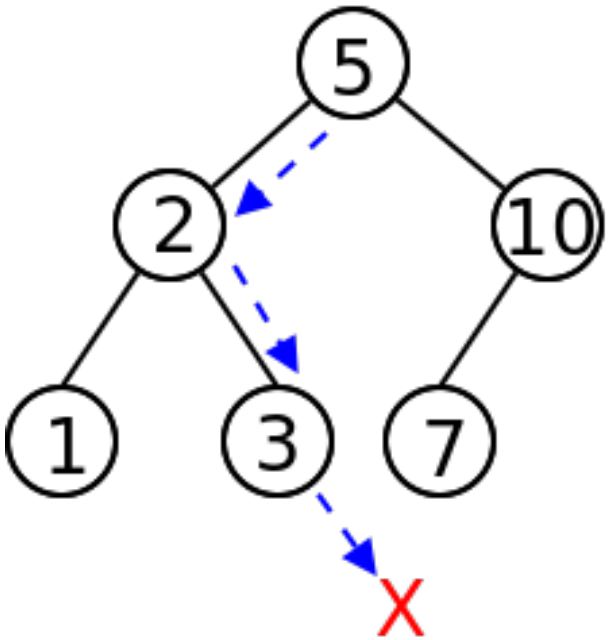


contains(7) ?

true

- Começar na raíz, e ir percorrendo a árvore
- Escolher ramo esquerdo ou direito consoante o valor seja menor ou maior que o nó "actual"

Árvores Binárias de Pesquisa - Pesquisar um valor

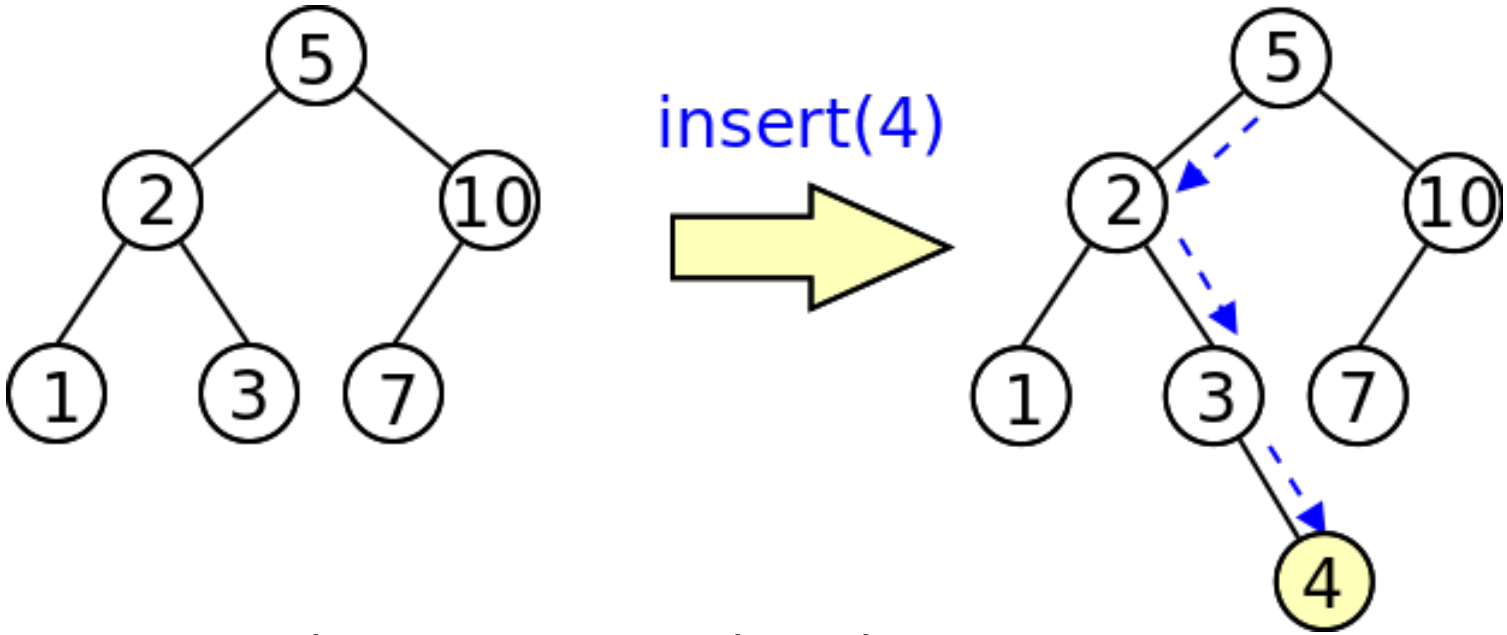


contains(4) ?

false

- Começar na raíz, e ir percorrendo a árvore
- Escolher ramo esquerdo ou direito consoante o valor seja menor ou maior que o nó "actual"

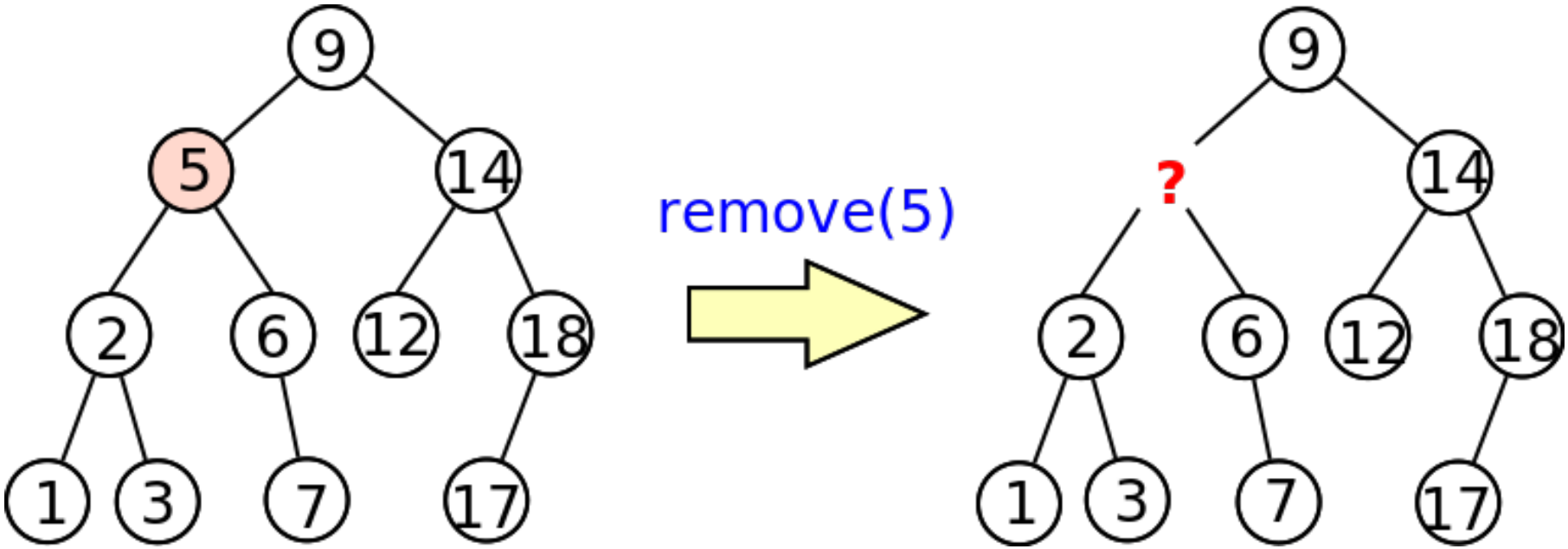
Árvores Binárias de Pesquisa - Inserir um valor



- Começar na raíz, e ir percorrendo a árvore
- Escolher ramo esquerdo ou direito consoante o valor seja menor ou maior que o nó "actual"
- Inserir na posição folha correspondente

Nota: Normalmente **se valor for igual a um já existente**... não se insere. Caso desejemos ter valores repetidos (um *multiset*) temos de ser coerentes e assumir sempre uma posição (ex: sempre à esquerda, ou seja, nós do ramo esquerdo seriam $\leq$ e nós do ramo direito seriam $>$)

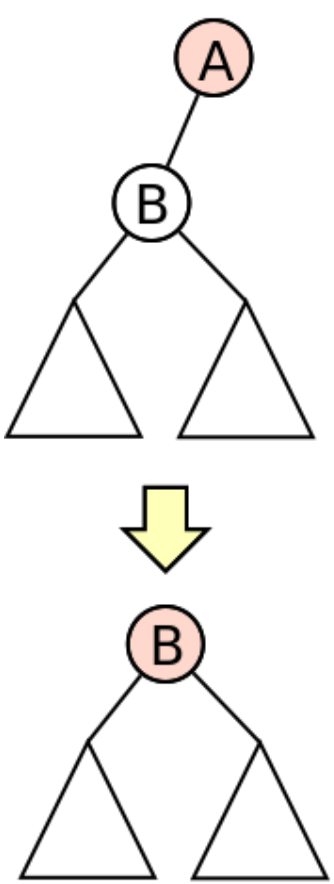
Árvores Binárias de Pesquisa - Remover um valor

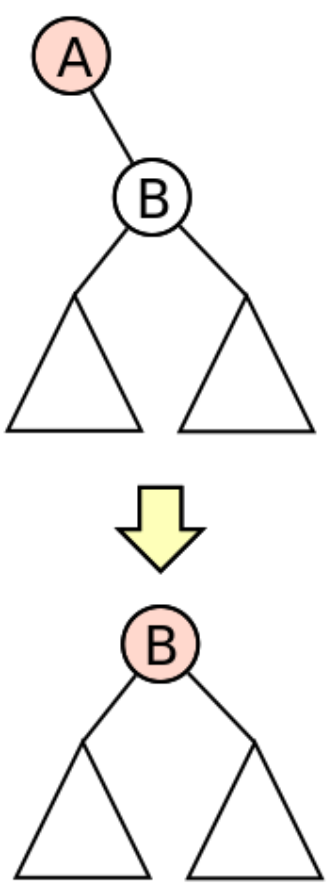


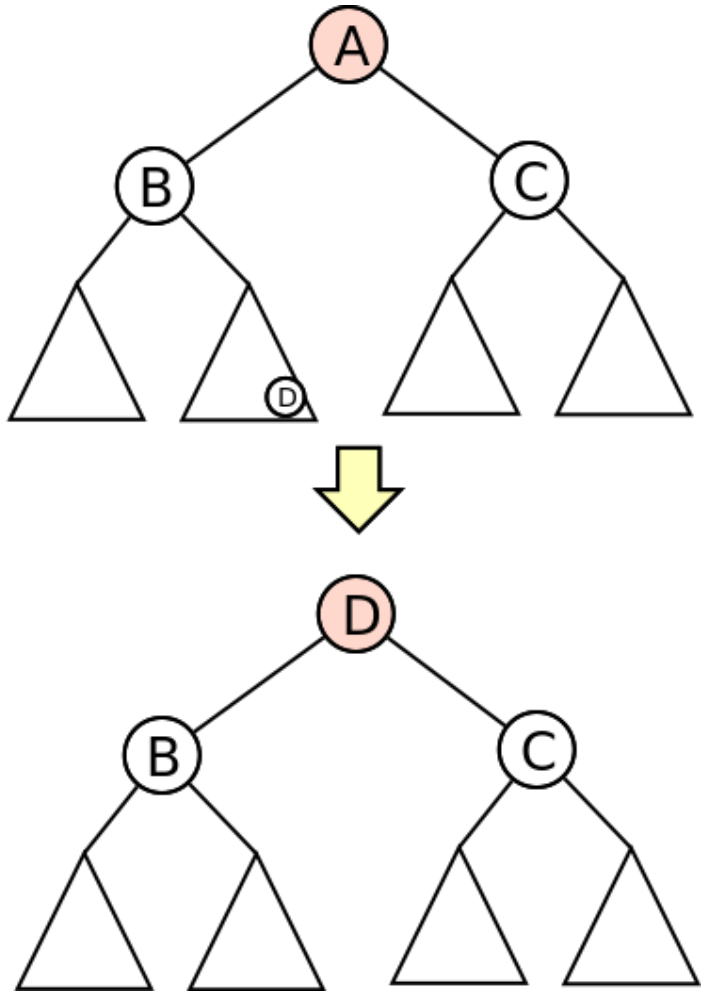
- Começar na raíz, e ir percorrendo a árvore até encontrar o valor
- Ao retirar o valor o que fazer a seguir?
  - Se o nó que retiramos só tiver um ramo filho, basta *"subir"* esse filho até à posição correspondente
  - Se tiver dois ramos filhos, os candidatos a ficarem nessa posição são:
    - ★ O maior nó do ramo esquerdo, ou
    - ★ o menor nó do ramo direito

Árvores Binárias de Pesquisa - Remover um valor

- Depois de encontrar o nó é preciso decidir **como o retirar**
  - 3 casos possíveis:

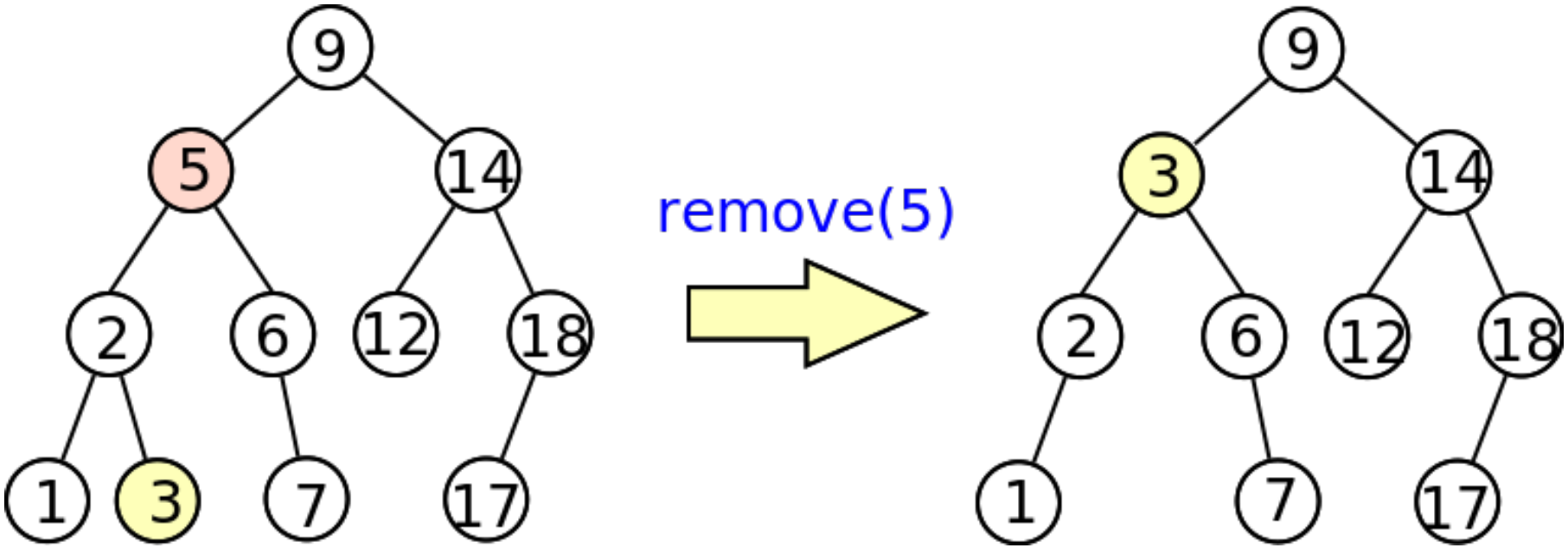






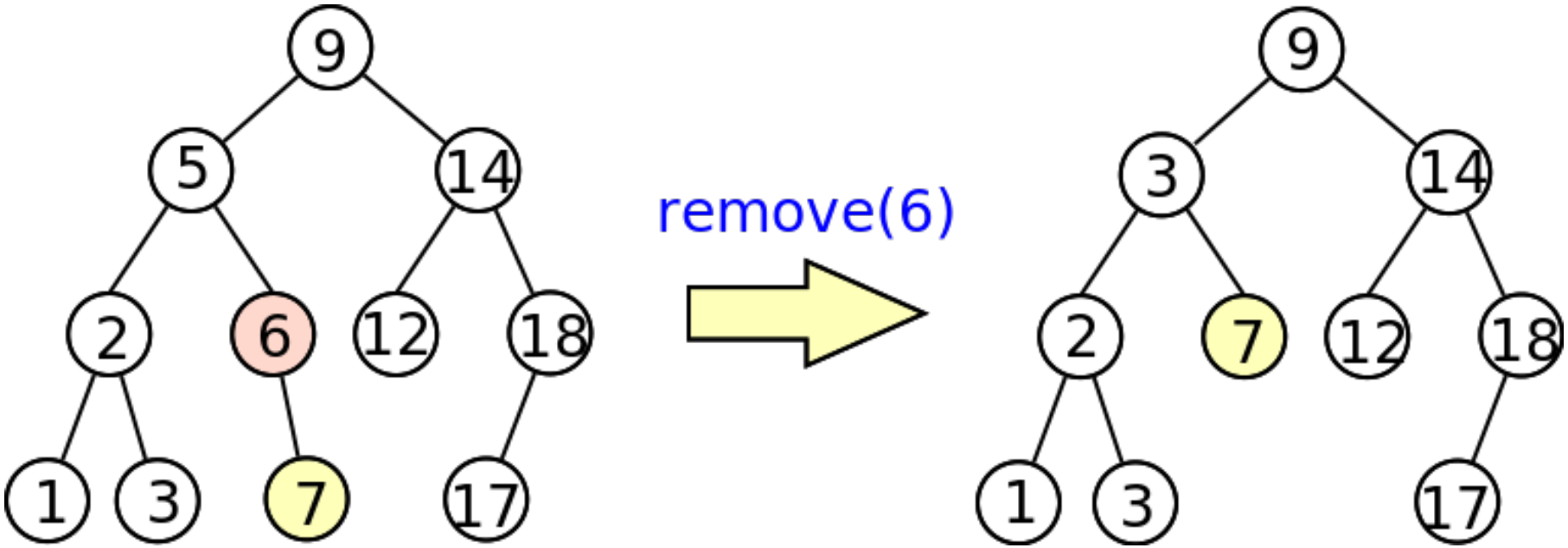
Árvores Binárias de Pesquisa - Remover um valor

Exemplo com dois filhos



Árvores Binárias de Pesquisa - Remover um valor

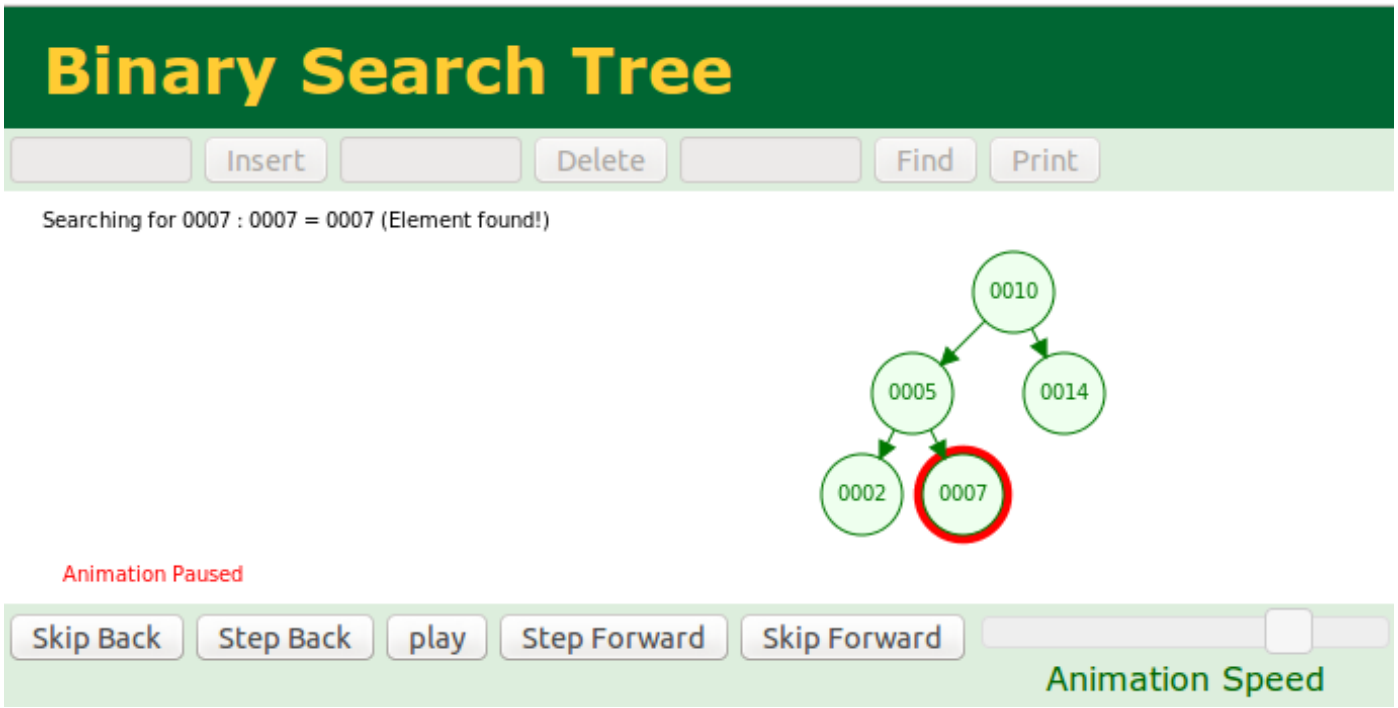
Exemplo só com um filho



Árvores Binárias de Pesquisa - Visualização

- Podem visualizar a pesquisa, inserção e remoção (experimentem o url indicado):

  https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html



Árvores Binárias de Pesquisa - Complexidade

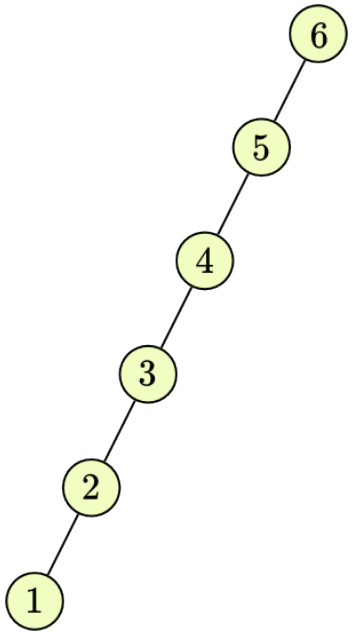
- Como caracterizar o **tempo que cada operação demora**?
  - Todas as operações procuram um nó percorrendo a **altura** da árvore

Complexidade de operações numa árvore binária de pesquisa

Seja h a altura de uma árvore binária de pesquisa T. A complexidade de descobrir o mínimo, o máximo ou efetuar uma pesquisa, uma inserção ou uma remoção em T é $\mathcal{O}(h)$.

Desiquilíbrio numa Árvore Binária de Pesquisa

- O **problema** do método anterior:

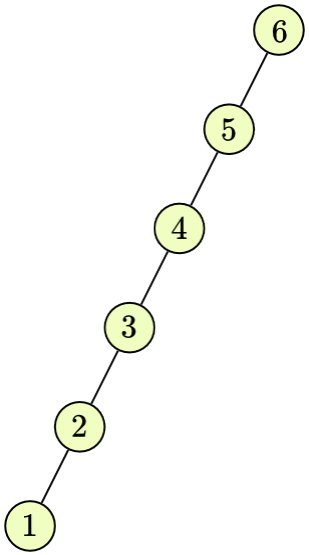


A altura da árvore pode ser da ordem de $\mathcal{O}(n)$ (n, número de elementos)

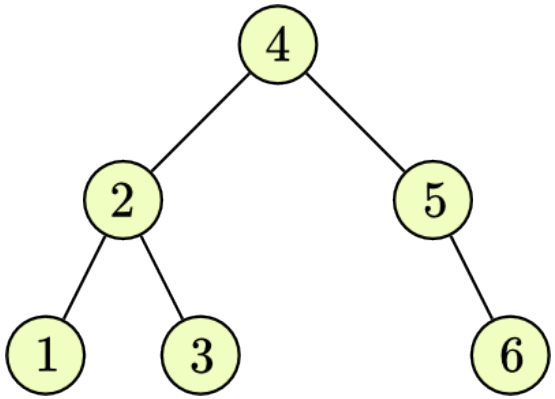
(a altura depende da ordem de inserção e existem ordens "más")

Árvores equilibradas

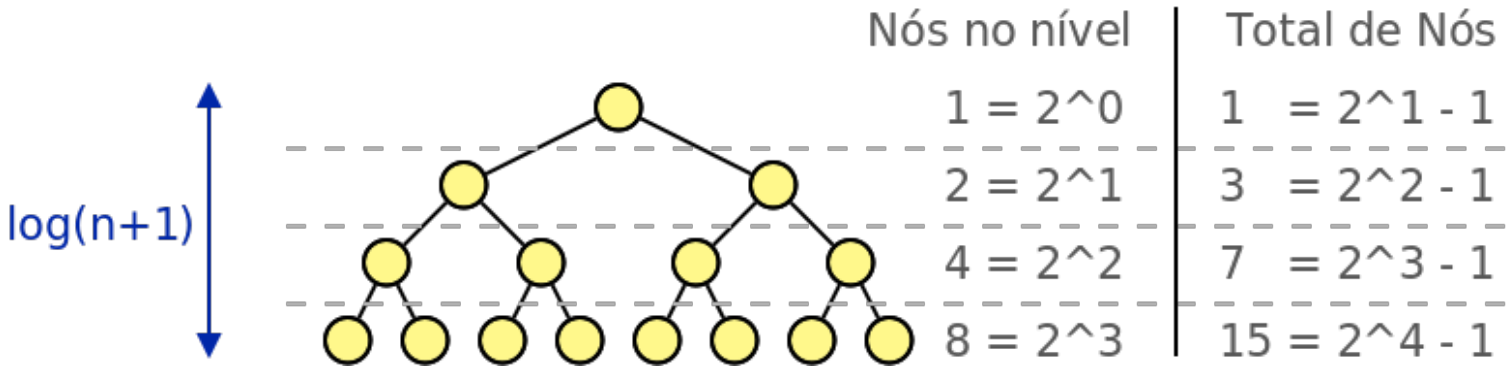
- Queremos árvores... **equilibradas**



vs



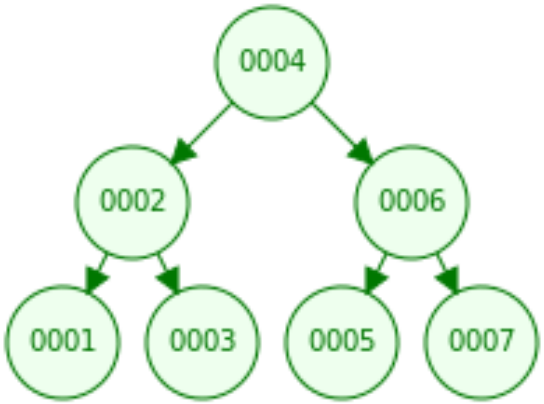
- Numa árvore equilibrada com n nós, a altura é ... $\mathcal{O}(\log n)$



Árvores equilibradas

Dado um conjunto de números, **por que ordem inserir** numa árvore binária de pesquisa para que fique o mais equilibrada possível?

Resposta: *"pesquisa binária"* - se os números estiverem ordenados, inserir o elemento do meio, partir a lista restante em duas nesse elemento e inserir os restantes elementos de cada metade pela mesma ordem



Estratégias de Balanceamento

- E se não soubermos os elementos todos à partida e tivermos de **dinamicamente** ir inserindo e removendo elementos?

  Nota: não vamos falar de como implementar nenhuma das estratégias seguintes deste slide, mas para ficarem com uma ideia de que existem e quais os seus nomes

  (vão falar de algumas delas noutra unidades curriculares como *Desenho e Análise de Algoritmos*, *Algoritmos* ou *Tópicos Avançados em Algoritmos*)

- Existem estratégias para garantir que a complexidade das operações de pesquisar, inserir e remover são melhores que $\mathcal{O}(n)$

Árvores equilibradas:
(altura $\mathcal{O}(\log n)$)

- Red-Black Trees
- AVL Trees
- Splay Trees
- Treaps

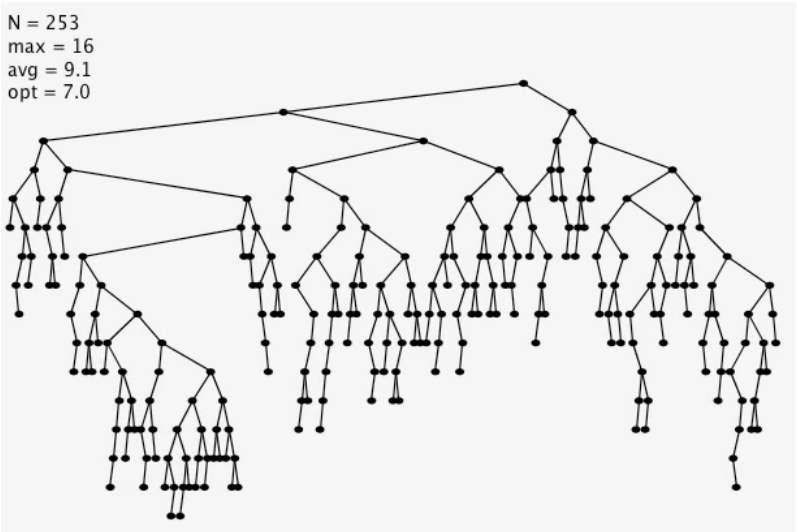
Outras estruturas de dados:

- Skip List
- Hash Table
- Bloom Filter

Altura para uma ordem aleatórios

Altura de uma árvore com elementos aleatórios

Se inserirmos n elementos por uma ordem completamente aleatória numa árvore binária de pesquisa, a sua *altura esperada* é $\mathcal{O}(\log n)$



- Se tiverem curiosidade em ver uma prova espreitem o capítulo 12.4 do livro *"Introduction to Algorithms"* (não é necessário saber para exame)
- Para dados puramente *aleatórios*, a altura média é portanto $\mathcal{O}(\log n)$ à medida que vamos inserindo e removendo

Árvores Binárias de Pesquisa - Implementação

- Como implementar árvores binárias de pesquisa em **Java**?
- As árvore binárias *normais* apenas precisavam do método `equals()` para saber se um dado elemento estava na árvore.
- As árvores binárias de pesquisa necessitam contudo de elementos que sejam **comparáveis**:
  - Precisamos de saber se um elemento é *menor*, *igual* ou *maior* que outro
- Como fazer isto em java para um objecto genérico?
  Exemplo: não é possível comprar duas strings com operador $<$

```
String s1 = "ola", s2 ="mundo";
if (s1 < s2) System.out.println("menor");
```

Em Java isto gera o erro: **`bad operand types for binary operator '<'`**

Interface Comparable

- Em Java, a maneira correcta de comparar dois objectos é usar o método `compareTo()` (definido no interface *Comparable*).
- Sejam $o1$ e $o2$ dois objectos comparáveis do mesmo tipo. `o1.compareTo(o2)` devolve:
  - um valor negativo (< 0) se $o1$ é menor que $o2$
  - zero (0) se $o1$ for igual a $o2$
  - um valor positivo (> 0) se $o1$ é maior que $o2$
- Os *wrappers* dos tipos primitivos implementam o interface comparable, sendo que podemos directamente usá-lo:

```
String s1 = "ola", s2 ="mundo";
System.out.println(s1.compareTo(s2)); // Número positivo
Integer i1 = 42, i2 = 42;
System.out.println(i1.compareTo(i2)); // Zero
Double d1 = 0.5, d2 = 1.0;
System.out.println(d1.compareTo(d2)); // Número negativo
```

Interface Comparable

- Muitos método de Java necessitam que os objectos seja comparáveis
- Um exemplo é o método `Arrays.sort` para ordenar um array. Como os wrappers são comparáveis, podemos chamar sem fazer mais nada:

```
import java.util.Arrays;

class TestSort {
   public static void main(String[] args) {
      Integer[] v1 = {4,6,7,3,1,8,2};
      Arrays.sort(v1);
      System.out.println(Arrays.toString(v1));
      String[] v2 = {"quarenta","e","dois","sentido","vida"};
      Arrays.sort(v2);
      System.out.println(Arrays.toString(v2));
   }
}
```

```
[1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]
[dois, e, quarenta, sentido, vida]
```

Nota: Sem a chamada a Arrays.toString, apenas seria imprimida a referência para o Array

Interface Comparable

- Se tentarmos ordenar uma classe "nossa", o Java vai-se queixar caso não seja implementado o interface *Comparable*:

```
import java.util.Arrays;

class Person {
   String name;
   int age;
   Person(String n, int a) { name = n; age = a;}
   public String toString() {return "(" + name + "," + age + ")";}
}
class TestSort {
   public static void main(String[] args) {
      Person[] v = new Person[3];
      v[0] = new Person("Mary",23);
      v[1] = new Person("John",42);
      v[2] = new Person("X",31);
      Arrays.sort(v);
      System.out.println(Arrays.toString(v));
   }
}
```

```
Exception in thread "main" java.lang.ClassCastException: Person cannot
be cast to java.lang.Comparable
```

Interface Comparable

- Para ser usado com métodos que necessitem de objectos comparáveis... a nossa classe deve implementar o interface Comparable, que "exige" a implementação do método **compareTo**
- Por exemplo, se quiseremos que a pessoa seja comparada tendo em conta a ordem alfabética do seu nome:

```
class Person implements Comparable<Person> {
   String name;
   int age;

   Person(String n, int a) { name = n; age = a;}
   public String toString() {return "(" + name + "," + age + ")";}
   // Método compareTo para implementar o interface Comparable
   public int compareTo(Person p) { return name.compareTo(p.name); }
}
```

- O programa do slide anterior, com esta classe, já compila e dá o seguinte *output* quando executado:

```
[(John,42), (Mary,23), (X,31)]
```

Interface Comparable

- Se quisermos então criar uma classe com genéricos que precise de comparar elementos, precisamos então "apenas" de dizer que o tipo genérico tem de implementar o interface comparable:

```
// Classe exemplo para mostrar uso do interface Comparable:  erro de compilação
class TestComparable<T> {
   boolean lessThan(T o1, T o2) {
      if (o1.compareTo(o2) < 0) return true;
      else return false;
   }
}
```

Devolve erro dizendo que não consegue encontrar método **compareTo**

```
// Classe exemplo para mostrar uso do interface Comparable:  ok!
class TestComparable<T extends Comparable<T>> {
   boolean lessThan(T o1, T o2) {
      if (o1.compareTo(o2) < 0) return true;
      else return false;
   }
}
```

Compila sem problemas, porque T implementa o interface Comparable

Interface Comparable

- Um último detalhe:

  (assumindo que temos as classes *Person* e *TestComparable* dos slides anteriores)

```
// Classe que herda os métodos de Person
class Student extends Person {
   Student(String n, int a) {super(n,a);}
}

class Test {
   public static void main(String[] args) {
      Student s1 = new Student("Paul", 22);
      Student s2 = new Student("Sarah", 25);

      // Esta linha compila bem porque Student herda
      // o método compareTo a partir de Person
      int resul = s1.compareTo(s2);

      // Esta linha dá erro de compilação
      // porque TestComparable exige algo que Comparable<Student>
      TestComparable<Student> t;
   }
}
```

Erro porque não é implementado directamente **comparable<Student>**

Interface Comparable

- Se mudarmos a clase TestComparable para:

```
// O tipo T tem de implementar o interface Comparable
// (ou tê-lo herdado de uma super classe).
class TestComparable<T extends Comparable<? super T>> {
   boolean lessThan(T o1, T o2) {
      if (o1.compareTo(o2) < 0) return true;
      else return false;
   }
}
```

- Agora o o programa anterior já **compila sem problemas**, pois a linha `<T extends Comparable<? super T>>` admite que não seja o tipo T a implementar directamente
  (o que importa é que seja possível chamar T.compareTo()).

Árvores Binárias de Pesquisa - Implementação

- Estamos finalmente prontos para implementar uma árvore binária de pesquisa com objectos de tipo genérico.
- Comecemos por um **nó**, que tem de ser de objectos... comparáveis:

```
class BSTNode<T extends Comparable<? super T>> {
   private T value;           // Valor guardado no nó
   private BSTNode<T> left;   // Filho esquerdo
   private BSTNode<T> right; // Filho direito

   // Construtor
   BSTNode(T v, BSTNode<T> l, BSTNode<T> r) {
      value = v;
      left = l;
      right = r;
   }

   // Getters e Setters
   public T getValue() {return value;}
   public BSTNode<T> getLeft() {return left;}
   public BSTNode<T> getRight() {return right;}
   public void setValue(T v) {value = v;}
   public void setLeft(BSTNode<T> l) {left = l;}
   public void setRight(BSTNode<T> r) {right = r;}
}
```

Árvores Binárias de Pesquisa - Implementação

- A árvore contém uma referência para a raíz (tal como uma árvore binária normal)

```
public class BSTree<T extends Comparable<? super T>> {
    private BSTNode<T> root; // raíz da árvore

    // Construtor
    BSTree() {
        root = null;
    }

    // Verificar se árvore está vazia
    public boolean isEmpty() {
        return root == null;
    }

    // Limpa a árvore (torna-a vazia)
    public void clear() {
        root = null;
    }

    // (...)
}
```

Árvores Binárias de Pesquisa - Implementação

- O que muda são os outros métodos, tal como **contains**, **insert** e **remove**, que se podem aproveitar do facto de ser árvore binária de pesquisa,
- Estes são métodos da classe BSTree. Para uma explicação visual do que fazem, podem ver slides anteriores (slides 38 a 45)
- Comecemos pelo **contains**

```
// O elemento value está contido na árvore?
public boolean contains(T value) {
   return contains(root, value);
}

private boolean contains(BSTNode<T> n, T value) {
   if (n==null) return false;
   if (value.compareTo(n.getValue()) < 0) // menor?  sub-árvore esquerda
      return contains(n.getLeft(), value);
   if (value.compareTo(n.getValue()) > 0) // maior?  sub-arvore direita
      return contains(n.getRight(), value);
   return true; // se não é menor ou maior, é porque é igual
}
```

Árvores Binárias de Pesquisa - Implementação

- No **insert** vamos aproveitar o valor de retorno da função recursiva

```
// Adicionar elemento a uma árvore de pesquisa
// Devolve true se conseguiu inserir, false caso contrário
public boolean insert(T value) {
   if (contains(value)) return false;
   root = insert(root, value);
   return true;
}

private BSTNode<T> insert(BSTNode<T> n, T value) {
   if (n==null)
      return new BSTNode<T>(value, null, null);
   else if (value.compareTo(n.getValue()) < 0)
      n.setLeft(insert(n.getLeft(), value));
   else if (value.compareTo(n.getValue()) > 0)
      n.setRight(insert(n.getRight(), value));
   return n;
}
```

Árvores Binárias de Pesquisa - Implementação

- **remove**: substituir removido pelo maior valor da subárvore esquerda

```
// Remover elemento de uma árvore de pesquisa
// Devolve true se conseguiu remover, false caso contrário
public boolean remove(T value) {
    if (!contains(value)) return false;
    root = remove(root, value);
    return true;
}
// Assume-se que elemento existe (foi verificado antes)
private BSTNode<T> remove(BSTNode<T> n, T value) {
    if (value.compareTo(n.getValue()) < 0)
        n.setLeft(remove(n.getLeft(), value));
    else if (value.compareTo(n.getValue()) > 0)
        n.setRight(remove(n.getRight(), value));
    else if (n.getLeft() == null) n = n.getRight(); // Sem filho esq.
    else if (n.getRight() == null) n = n.getLeft(); // Sem filho dir.
    else { // Dois fihos:  ir buscar máximo do lado esquerdo
        BSTNode<T> max = n.getLeft();
        while (max.getRight() != null) max = max.getRight();
        n.setValue(max.getValue()); // Substituir valor removido
        n.setLeft(remove(n.getLeft(), max.getValue()));
    }
    return n;
}
```

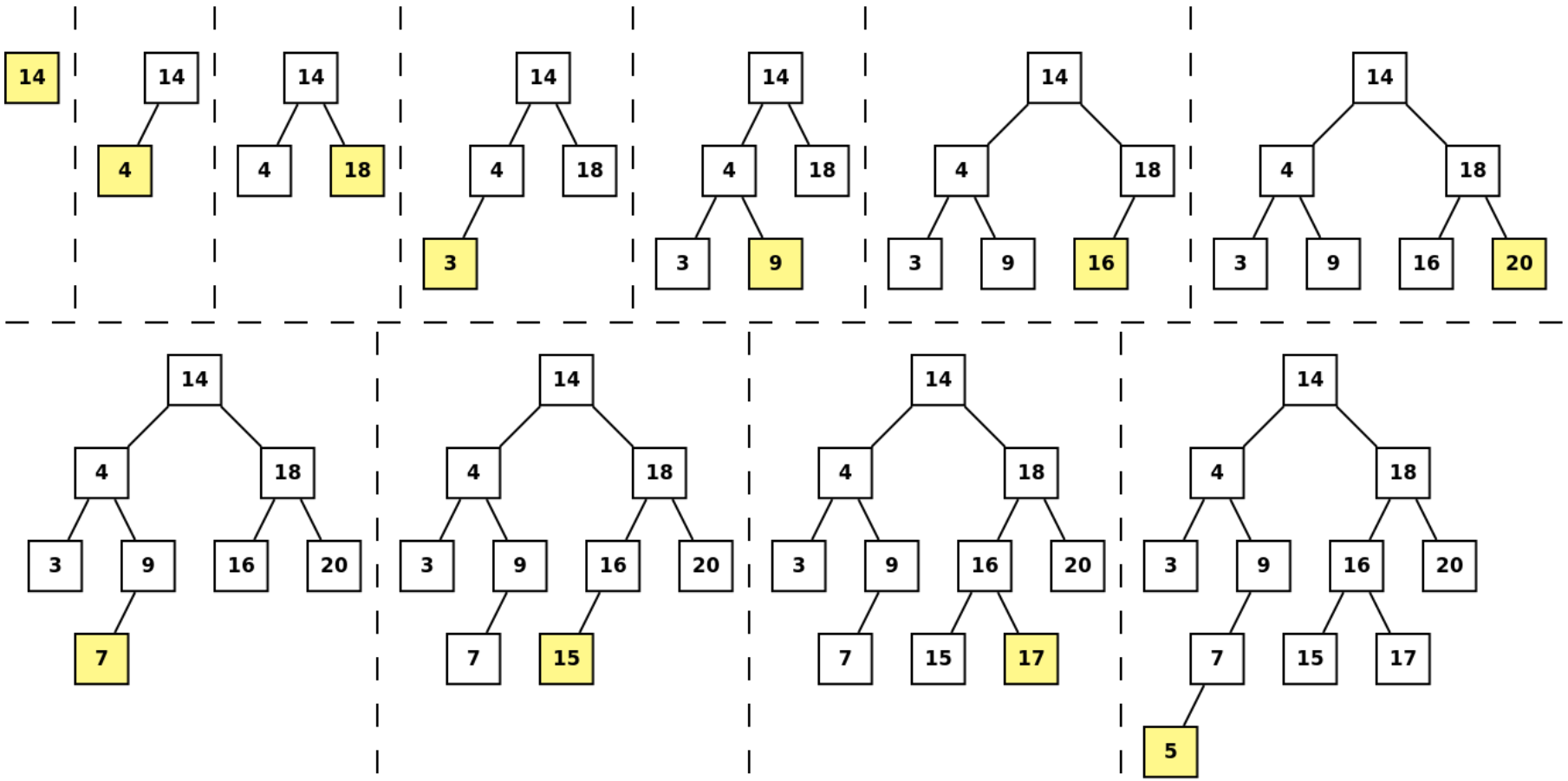
Árvores Binárias de Pesquisa - Teste

- Um exemplo de utilização (assumindo implementação usual de PreOrder, InOrder e PostOrder):

```
class TestBSTree {
   public static void main(String[] args) {

      // Criação da Árvore
      BSTree<Integer> t = new BSTree<Integer>();
      // Inserindo 11 elementos na árvore binária de pesquisa
      int[] data = {14, 4, 18, 3, 9, 16, 20, 7, 15, 17, 5};
      for (int i=0; i<data.length; i++) t.insert(data[i]);

      // Escrever resultado de chamada a alguns métodos
      System.out.println("numberNodes = " + t.numberNodes());
      System.out.println("depth = " + t.depth());
      System.out.println("contains(2) = " + t.contains(2));
      System.out.println("contains(3) = " + t.contains(3));
      // Escrever nós da árvore seguindo várias ordens possíveis
      t.printPreOrder(); t.printInOrder(); t.printPostOrder();
      // Experimentando remoção
      t.remove(14);
      t.printPreOrder(); t.printInOrder(); t.printPostOrder();
   }
}
```

Árvores Binárias de Pesquisa - Teste

- O código do slide anterior cria a seguinte árvore binária de pesquisa:



- Inorder, esta árvore fica: 3 4 5 7 9 14 15 16 17 18 20

Quando imprimidos *inOrder*, os elementos de uma árvore binária de pesquisa ficam sempre por ordem crescente

Árvores Binárias de Pesquisa e TAD Conjunto

- Quase no início do semestre falamos do **TAD Conjunto**, que tinha as seguintes operações básicas (ou seja, o seu *interface*):
  - **boolean contains(x)** - verifica se o elemento x está no conjunto.
    Retorna *true* se o elemento está no conjunto e *false* caso contrário.
  - **boolean add(x)** - adiciona o elemento x ao conjunto.
    Retorna *true* se foi adicionado ou *false* caso x já esteja no conjunto.
  - **boolean remove(x)** - remove o elemento x do conjunto.
    Retorna *true* se foi removido ou *false* caso x não esteja no conjunto.
  - **int size()** - retorna o número de elementos do conjunto.
  - **void clear()** - limpa o conjunto (torna-o vazio)
- Na altura era apenas um *IntSet* (números inteiros - ainda não conheciam *genéricos*) e vimos como implementá-lo usando... arrays
- As **árvores binárias de pesquisa** são outra estrutura de dados que suporta todas estas operações de um TAD Conjunto
  (literalmente existem métodos com o mesmo nome, com exceção do *add*, que chamamos de *insert*, e do *size*, que chamamos de *numberNodes*)

TAD Conjunto - Comparação de Implementações

- Comparemos algumas implementações possíveis do **TAD Conjunto**.
- Para **qualquer tipo**, verficando igualdade com *equals*:
  - **Lista Desordenada:** array ou lista ligada contendo todos os elementos do conjunto sem nenhuma ordem. Procurar implica pesquisa linear.
- Para **tipos comparáveis** (onde se possa usar o *compareTo*)
  - **Lista Ordenada:** array por ordem crescente. Pode procurar-se com pesquisa binária, mas ao inserir/remover temos de manter ordenado.
  - **Arv. Pesquisa**: árvore binária de pesquisa. As operações dependem da altura da árvore, que tem:
    - ⋆ Valor esperado de $\mathcal{O}(\log n)$ para dados "aleatórios" (pior caso é $\mathcal{O}(n)$)
    - ⋆ É possível garantir $\mathcal{O}(\log n)$ para quaisquer dados usando estratégias de balanceamento (ex: AVL Trees, Red-Black Trees)
- Para **números inteiros** (vimos anteriormente, mas não é *genérica*)
  - **BooleanArray:** array de booleanos - posição x é *true/false* dependendo se o elemento x está ou não no conjunto.

TAD Conjunto - Comparação de Implementações

- **n**: número de elementos do conjunto
- **k**: tamanho do maior elemento

	Complexidade Temporal					Complex. Espacial
	contains	**insert**	**remove**	**size**	**clear**	
Lista Desordenada	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$
Lista Ordenada	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$
Arv. Pesquisa	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$
BooleanArray	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(k)$	$\mathcal{O}(k)$

- Notem que $\log n$ é muito mais pequeno que n (ex: log(1 milhão) é ~ 20)
- A maioria das linguagens de programação tem disponível o TAD Conjunto precisamente como árvore binária de pesquisa (ex: Java TreeSet e C++ set)
- A última solução é mais rápida, mas gasta muita memória e não é genérica (é possível ter mais genérico e que ocupe menos memória e com operações em $\mathcal{O}(1)$ usando *hash tables*: a sua ideia básica é ter maneira de converter valores em posições usando para isso uma função de *hash* - vão falar disto noutras UCs)

Exemplo de aplicação do TAD Conjunto

- Imaginemos que temos disponível uma **lista de nomes de pessoas** (poderiam ser por exemplo alunos de EDados, ou actores de filmes)

persons.txt

```
Antonio Augusto Martins
Ricardo Jorge Oliveira
Carla Silva Barbosa
Antonio Sousa Cunha
Judite Pinto Rodrigues
...
```

- Como poderíamos calcular **quantos primeiros nomes diferentes existem**? (ou quantos apelidos diferentes existem?)
  - Uma solução simples usando um **TAD conjunto** *s* seria simplesmente **inserir** todos nomes em *s* e no final verificar o **tamanho** de *s*
  - **Eficiência** depende da implementação usada (da sua complexidade)

"Get your data structures correct first, and the rest of the program will write itself." *David Jones*

Exemplo de aplicação do TAD Conjunto

- Contar quantos nomes existem resume-se agora a chamadas a métodos da BSTree em duas linhas de código:
  - *n* **inserts** para adicionar os nomes ao conjunto
  - uma chamada a **numberNodes** no final

```
public static void main(String[] args) {
   Scanner in = new Scanner(System.in);

   // Usei <> em vez de <String> para mostrar "diamond notation":  a partir
   // do Java 1.7 passou a ser possível fazer assim e o Java infere o tipo
   BSTree<String> set = new BSTree<>();

   while (in.hasNextLine()) {
      String line = in.nextLine();       // Ler uma linha
      String[] names = line.split(" "); // Separar por palavras
      set.insert(names[0]);              // Inserir primeiro nome
   }
   System.out.println("Nomes diferentes = " + set.numberNodes());
}
```

Motivação para TAD Dicionário

- E saber quantas **quantas ocorrências existem de cada nome**?
  - É preciso de associar "dados" a cada "elemento" do conjunto

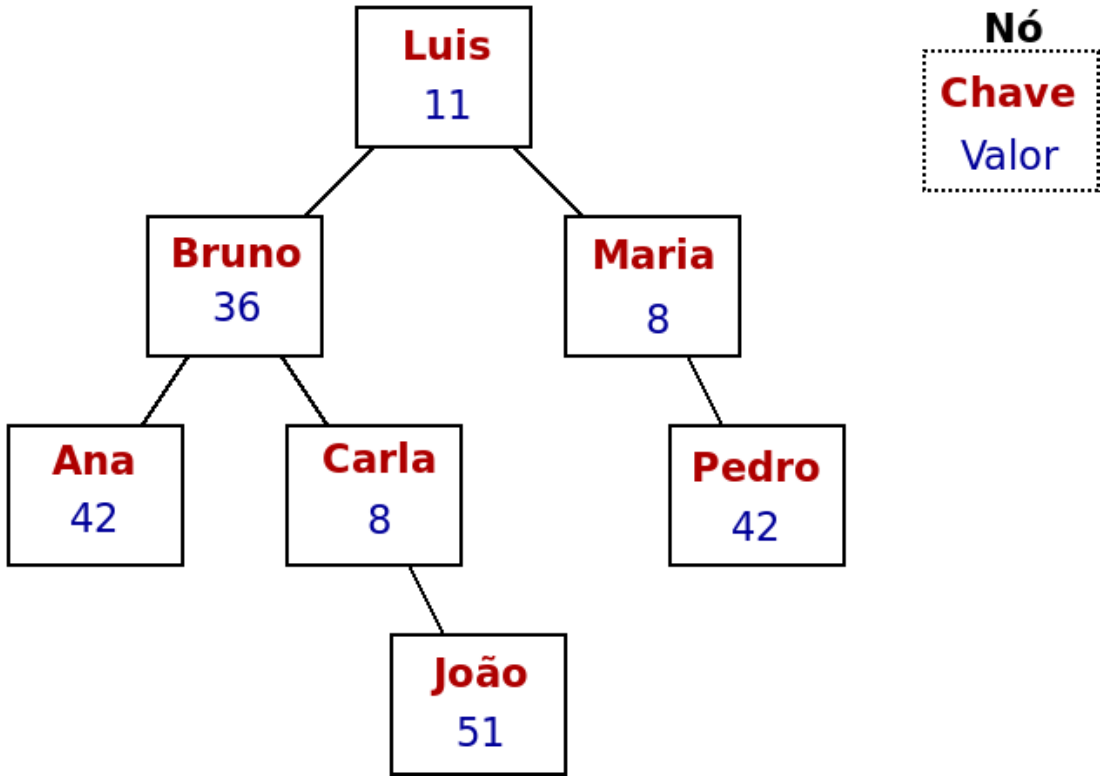
TAD Dicionário (ou Mapa, ou Array Associativo)

Um TAD Dicionário armazena pares **(chave, valor)**. Uma chave apenas aparece uma vez e tem associada a si um valor.

- Metáfora de array associativo: `ocorrencias["pedro"] = 42`
- As operações típicas de um dicionário são:
  - **Adicionar** um par ao dicionário (chave e valor)
  - **Remover** um par do dicionário (dando a chave)
  - **Modificar** um par do dicionário (dar chave e novo valor)
  - **Devolver valor** associado a uma dada chave

Implementação do TAD Dicionário

- Obviamente, também podemos usar **árvores binárias de pesquisa** para este efeito, com pequenas alterações ao código:
  - Cada nó vai ter como atributos uma chave e um valor
  - O elemento que determina a posição na árvore é a chave



Exemplo de um dicionário com chaves do tipo *String* e valores do tipo *Integer*

Dicionário com Árvores de Pesquisa - Nó

- Vejamos como ficaria um **nó**:
  (implementação completa disponível no site)

```
// K é o tipo da chave (key) e V o tipo do valor (value)
// O tipo K tem de implementar o interface Comparable
public class BSTMapNode<K extends Comparable<? super K>, V> {
    private K key;                    // chave
    private V value;                  // valor
    private BSTMapNode<K,V> left;     // Filho esquerdo
    private BSTMapNode<K,V> right;    // Filho direito

    // Construtor
    BSTMapNode(K k, V v, BSTMapNode<K,V> l, BSTMapNode<K,V> r) {
        key = k;
        value = v;
        left = l;
        right = r;
    }

    // Getters e Setters habituais
    // ...
}
```

Dicionário com Árvores de Pesquisa - BSTMap

- O dicionário em si é apenas uma árvore binária de pesquisa.
- Vamos espreitar um pouco da implementação e as assinaturas dos principais métodos: (implementação completa no site)

```
public class BSTMap<K extends Comparable<? super K>,V> {
   private BSTMapNode<K,V> root; // raíz da árvore

   BSTMap() {root = null;}                              // Construtor
   public boolean isEmpty() {return root == null;} // Dicionário vazio?
   public void clear() {root = null;}                   // Limpar dicionário
   public int size() { /*(...)*/ }              // Número de chaves da árvore

   // Devolver o valor associado a uma chave (ou null caso não exista)
   public V get(K key) { /*(...)*/ }

   // Adicionar par (chave,valor) - se chave já existir, substituir valor antigo
   public void put(K key, V value) { /*(...)*/ }

   // Remover uma chave do dicionário - devolve true se conseguiu remover
   public boolean remove(K key) { /*(...)*/ }

   // Devolver lista ligada das chaves (usando listas do Java)
   public LinkedList<K> keys() { /*(...)*/ }
}
```

Dicionário com Árvores de Pesquisa - get

- **get** é muito similar ao **contains** da *BSTree*
- **put** é muito similar ao **insert** da *BSTree*
- **remove** é muito similar ao **remove** da *BSTree*
- Vamos espreitar o **get()**:

```
// Devolver o valor associado a uma chave (ou null caso não exista)
public V get(K key) {
    return get(root, key);
}

private V get(BSTMapNode<K,V> n, K key) {
    if (n==null) return null;
    if (key.compareTo(n.getKey()) < 0) return get(n.getLeft(), key);
    if (key.compareTo(n.getKey()) > 0) return get(n.getRight(), key);
    return n.getValue(); // se não é menor ou maior, é porque é igual
}
```

Dicionário com Árvores de Pesquisa - put

- Vamos espreitar o **put()**:

```
// Adicionar par (chave,valor) ao dicionário
// Se chave já existir, substitui o valor antigo pelo novo
public void put(K key, V value) {
   root = put(root, key, value);
}

private BSTMapNode<K,V> put(BSTMapNode<K,V> n, K key, V value) {
   if (n==null)
      return new BSTMapNode<K,V>(key, value, null, null);
   else if (key.compareTo(n.getKey()) < 0)
      n.setLeft(put(n.getLeft(), key, value));
   else if (key.compareTo(n.getKey()) > 0)
      n.setRight(put(n.getRight(), key, value));
   else
      n.setValue(value);
   return n;
}
```

Dicionário com Árvores de Pesquisa - keys

- Vamos espreitar o **keys()**:
- Usamos listas ligadas do Java para ilustrar, mas poderíamos também ter usado as listas que criamos nesta UC

```
// Devolver lista ligada das chaves (usando listas do Java)
public LinkedList<K> keys() {
    LinkedList<K> list = new LinkedList<K>();
    keys(root, list);
    return list;
}

private void keys(BSTMapNode<K,V> n, LinkedList<K> l) {
    if (n==null) return;
    keys(n.getLeft(), l);
    l.addLast(n.getKey());
    keys(n.getRight(), l);
}
```

Dicionário com Árvores de Pesquisa - Exemplo

- Vamos espreitar um exemplo de uso:

```
public class TestBSTMap {
    public static void main(String[] args) {
        // Criação de um dicionário
        BSTMap<String,Integer> map = new BSTMap<String,Integer>();

        // Inserindo alguns pares (chave,valor)
        map.put("Life", 42);
        map.put("Zero", 0);
        map.put("Infinity", 999);
        // Tamanho e conteúdo
        System.out.println("size = " + map.size());
        System.out.println("Value of \"Life\" = " + map.get("Life"));
        System.out.println("Value of \"Data\" = " + map.get("Data"));
        System.out.println(map.keys());

        // Modificando um valor
        map.put("Life", 22);
        System.out.println("Value of \"Life\" = " + map.get("Life"));
        // Apagando um valor
        map.remove("Life");
        System.out.println("Value of \"Life\" = " + map.get("Life"));
    }
}
```

Frequência dos nomes usando Dicionários

- Como contar então a frequência dos vários nomes?
- Ter um dicionário que associa a cada nome uma contagem, ou seja, um dicionário de pares *(String,Integer)*

```
public static void main(String[] args) {
    Scanner in = new Scanner(System.in);

    // Criar dicionário de pares (String,Integer)
    BSTMap<String,Integer> map = new BSTMap<>();

    while (in.hasNextLine()) {
        String line = in.nextLine();          // Ler uma linha
        String[] names = line.split(" ");     // Separar por palavras
        Integer i = map.get(names[0]);        // Contagem actual
        if (i==null) map.put(names[0], 1);    // Se não existe, colocar a 1
        else         map.put(names[0], i+1); // Se já existia, incrementar
    }

    LinkedList<String> names = map.keys();  // Ir buscar lista de nomes
    for (String s : names) // Percorrer lista e imprimir
        System.out.println(map.get(s) + " " + s);
}
```

Classes do Java

- Vimos implementações nossas dos TADs conjunto e dicionário
- A linguagem Java também tem disponíveis estes TADs:
  - interface `Set<E>`:
    https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/Set.html
  - interface `Map<K,V>`:
    https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/Map.html
- Estes interfaces têm implementações com árv. binárias de pesquisa:
  - classe `TreeSet<E>`:
    https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/TreeSet.html
  - classe `TreeMap<T>`:
    https://docs.oracle.com/javase/8/docs/api/java/util/TreeMap.html
- A documentação diz que são usadas árvores equilibradas, garantindo tempos logarítmicos (imagem é excerto da documentação):

Class TreeMap<K,V>

A Red-Black tree based `NavigableMap` implementation. The map is sorted according to the natural ordering of its keys, or by a `Comparator` provided at map creation time, depending on which constructor is used.

This implementation provides guaranteed log(n) time cost for the `containsKey`, `get`, `put` and `remove` operations. Algorithms are adaptations of those in Cormen, Leiserson, and Rivest's *Introduction to Algorithms*.

Exemplo de uso das classes do Java

- O programa anterior com as classes do Java:

```
public static void main(String[] args) {
    Scanner in = new Scanner(System.in);

    // Criar dicionário de pares (String,Integer)
    Map<String,Integer> map = new TreeMap<>();

    while (in.hasNextLine()) {
        String line = in.nextLine();          // Ler uma linha
        String[] names = line.split(" ");     // Separar por palavras
        Integer i = map.get(names[0]);        // Contagem actual
        if (i==null) map.put(names[0], 1);    // Se não existe, colocar a 1
        else         map.put(names[0], i+1); // Se já existia, incrementar
    }
    Set<String> names = map.keySet();  // Ir buscar conjunto de nomes
    for (String s : names) // Percorrer conjunto e imprimir
        System.out.println(map.get(s) + " " + s);
}
```