

Lógica

Exercícios

1.1 Sejam p e q as proposições “Joguei no Totoloto” e “Ganhei o *jackpot*”, respectivamente. Exprime cada uma das seguintes proposições compostas como frases em português.

- (a) $\neg p$
- (b) $p \wedge q$
- (c) $\neg p \vee \neg q$
- (d) $p \rightarrow q$
- (e) $q \rightarrow p$
- (f) $\neg p \rightarrow \neg q$

1.2 Constrói tabelas de verdade para cada uma das seguintes proposições.

- (a) $p \rightarrow p$
- (b) $\neg(p \rightarrow q)$
- (c) $\neg q \wedge (p \rightarrow q)$
- (d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
- (e) $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
- (f) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
- (g) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
- (h) $(p \oplus q) \wedge (p \wedge q)$
- (i) $(p \oplus q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$

1.3 Usando a álgebra booleana, mostra as seguintes equivalências entre proposições.

- (a) $\neg p \rightarrow q \iff \neg q \rightarrow p$
- (b) $p \rightarrow (q \rightarrow r) \iff q \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (c) $(p \rightarrow q) \rightarrow p \iff p$
- (d) $(p \vee q) \rightarrow r \iff (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
- (e) $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \iff \neg(p \oplus q)$

1.4 Mostra que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma tautologia.

1.5 Mostra que $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ não são equivalentes.

1.6 Exprime as proposições seguintes usando conectivas lógicas, quantificadores, comparações e operações aritméticas, tomando como universo o conjunto \mathbb{Z} dos números inteiros.

- (a) A soma de dois inteiros negativos é negativa.
- (b) A diferença entre dois inteiros negativos não é necessariamente negativa.
- (c) A soma dos quadrados de dois inteiros é maior ou igual ao quadrado da sua soma.

Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 1

(d) O módulo do produto de dois inteiros é igual ao produto dos seus módulos.

1.7 Traduz cada uma das seguintes proposições por uma frase em português, considerando como universo o conjunto \mathbb{R} dos números reais.

- (a) $(\exists x)(\forall y)(x + y = y)$
- (b) $(\forall x)(\forall y)((x \geq 0) \wedge (y < 0)) \rightarrow (x - y > 0)$
- (c) $(\exists x)(\exists y)((x \leq 0) \wedge (y \leq 0)) \rightarrow (x - y > 0)$
- (d) $(\forall x)(\forall y)((x \neq 0) \wedge (y \neq 0)) \leftrightarrow (xy \neq 0)$

1.8 Determina o valor lógico da proposição $(\forall x)(\exists y)(xy = 1)$ considerando os seguintes universos.

- (a) $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
- (b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (c) \mathbb{R}^+

1.9 Escreve cada uma das proposições seguintes por forma que as negações só apareçam directamente aplicadas a predicados.

- (a) $\neg((\exists y)(\exists x) P(x, y))$
- (b) $\neg((\forall x)(\exists y) P(x, y))$
- (c) $\neg(((\exists y) Q(y)) \wedge ((\forall x) \neg R(x, y)))$
- (d) $\neg((\exists y)((\exists x) R(x, y)) \vee ((\forall x) S(x, y)))$
- (e) $\neg((\exists y)((\forall x)(\exists z) T(x, y, z)) \vee ((\exists x)(\forall y) U(x, y, z)))$

1.10 Sejam p, q e r proposições lógicas. Quais das seguintes fórmulas são tautologias, quais são contradições e quais as que não são qualquer uma das duas?

- (a) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
- (b) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$
- (c) $((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$
- (d) $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge \neg(p \leftrightarrow r)$

1.11 Coloca as seguintes fórmulas em forma normal conjuntiva.

- (a) $((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (p \wedge \neg q)$
- (b) $(t \rightarrow (r \vee p)) \rightarrow ((\neg r \vee k) \wedge \neg k)$
- (c) $\neg((p \leftrightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q)$
- (d) $((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

1.12 Coloca as fórmulas da pergunta anterior em forma normal disjuntiva.