Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 2

Conjuntos

Exercícios

2.1 Quais das seguintes afirmações são falsas?

(a) $3 \in \{1, 2, 3\}$;
(b) $\{2\} \in \{1, 2\}$;
(c) $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$;
(d) $1 \subseteq \{1\}$;
(e) $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$;
(f) $\{2\} \subseteq \{2\}$;
(g) $\emptyset \in \emptyset$;
(h) $\emptyset \subseteq \emptyset$;
(i) $\emptyset \in \{\{\}\}$;
(j) $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

2.2 Sejam $A, B, C, D, E \subseteq \mathbb{Z}$ assim definidos:

$$\begin{aligned} A &= \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ B &= \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ C &= \{4n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ D &= \{6n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \\ E &= \{8n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Indica quais das seguintes afirmações são verdadeiras.

(a) $E \subseteq C \subseteq A$;
(b) $A \subseteq C \subseteq E$;
(c) $B \subseteq D$;
(d) $D \subseteq B$;
(e) $D \subseteq A$;
(f) $\overline{D} \subseteq \overline{A}$.

2.3 Para os conjuntos definidos na pergunta anterior determina os seguintes conjuntos.

(a) $C \cap E$;
(b) $B \cup D$;
(c) $A \cap B$;
(d) $B \cap D$;
(e) $\overline{A}$;
(f) $A \cap E$.

Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 2

2.4 Para um universo finito $\mathcal{U}$, $A, B \subseteq \mathcal{U}$. Ordena os seguintes inteiros.

(a) $|A \cup B|$, $|B|$, $|\emptyset|$, $|A \cap B|$, $|\mathcal{U}|$;
(b) $|A \setminus B|$, $|A| + |B|$, $|\emptyset|$, $|A \cup B|$;
(c) $|A \setminus B|$, $|\emptyset|$, $|A|$, $|A \cup B|$, $|\mathcal{U}|$.

2.5 Seja $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo onde estão definidos os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, e $D = \{2, 4, 6, 8\}$. Determina

(a) $(A \cup B) \cap C$;
(b) $A \cup (B \cap C)$;
(c) $\overline{C} \cup \overline{D}$;
(d) $\overline{C \cap D}$;
(e) $(A \cup B) \setminus C$;
(f) $A \cup (B \setminus C)$;
(g) $(B \setminus C) \setminus D$;
(h) $B \setminus (C \setminus D)$;
(i) $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$.

2.6 Determina os conjuntos A e B tais que:

(a) $A \setminus B = \{1, 3, 7, 11\}$, $B \cup A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14\}$ e $A \cap B = \{2\}$;
(b) $A \setminus B = \{1, 3, 7, 11\}$, $B \setminus A = \{2, 6, 8\}$ e $A \cap B = \{4, 9\}$;
(c) $A \setminus B = \{1, 2, 4\}$, $B \setminus A = \{7, 8\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$.

2.7 Prova cada uma das seguintes proposições ou dá um contra-exemplo no caso de serem falsas.

(a) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$;
(b) $A \subseteq B \wedge B \not\subseteq C \implies A \not\subseteq C$;
(c) $A \subseteq B \wedge B \not\subseteq C \implies A \subseteq C$;
(d) $A \not\subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \not\subseteq C$.
(e) $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \implies A \cap C \subseteq B \cap D \wedge A \cup C \subseteq B \cup D$;
(f) $A \subseteq C \wedge B \subseteq C \implies A \cap B \subseteq C \wedge A \cup B \subseteq C$;
(g) $A \subseteq B \iff A \cap \overline{B} = \emptyset$;
(h) $A \cap C = B \cap C \implies A = B$;
(i) $A \cup C = B \cup C \implies A = B$;
(j) $(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C) \implies A = B$;
(k) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \iff C \subseteq A$;
(l) $A \subseteq B \iff \overline{\overline{A} \cup B} = \emptyset$.

2.8 Prova cada uma das seguintes proposições ou dá um contra-exemplo no caso de serem falsas.

(a) $A \cap B = B \cap A$;
(b) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$;
(c) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
(e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
(f) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;
(g) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;
(h) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
(j) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(k) $A \subseteq B \implies A \cap B = A$;
(l) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
(m) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = A \setminus C$;
(n) $A \setminus B \subseteq A$;
(o) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;
(p) $A \subseteq B \implies A \cap C \subseteq B \cap C$;
(q) $A \subseteq B \implies A \cup C \subseteq B \cup C$;
(r) $A \cap C = B \cap C \implies A = B$;
(s) $A \cup C = B \cup C \implies A = B$;
(t) $A \subseteq B \implies 2^A \subseteq 2^B$.

2.9 Indica, justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições.

(a) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$;
(b) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
(c) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;
(d) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$;
(e) $2^{a \cup B} = 2^A \cup 2^B$;
(f) $2^{A \cap B} = 2^A \cap 2^B$;
(g) $A \cup A = A$;
(h) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B)$;
(i) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \emptyset)$.

2.10 (a) Calcula $\{1, 3, 5\} \Delta \{1, 2, 3\}$.
(b) Mostra que $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
(c) O que podemos concluir sobre A e B se $A \Delta B = A$?
(d) Supõe que $A \Delta C = B \Delta C$. Isso implica que $A = B$?

2.11 Indica, justificando se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

(a) Se A e B são conjuntos infinitos, então $A \cap B$ é infinito.

(b) Se B é infinito e $A \subseteq B$ então A é infinito.

(c) Se $A \subseteq B$ e B é finito então A é finito.

(d) Se $A \subseteq B$ e A é finito então B é finito.

(e) Se A e B são infinitos e $B \subseteq A$ então $A \setminus B$ é finito.