Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 3

Relações

Exercícios

3.1 Prova ou dá um contra-exemplo para cada uma das seguintes proposições:

(a) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

(b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$;

(c) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

3.2 Considera as seguintes relações binárias sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{array}{rcl} R_1 & = & \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}, \\ R_2 & = & \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}; \\ R_3 & = & \{\langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}; \\ R_4 & = & \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,4\rangle\}; \\ R_5 & = & \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle\}; \\ R_6 & = & \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,4\rangle\}. \end{array}$$

(a) Representa cada uma das relações sob forma matricial e por um grafo dirigido.

(b) Indica quais as relações reflexivas, simétricas, anti-reflexivas, anti-simétricas e transitivas.

3.3 Considera as seguintes relações sobre $\{1, 2, 3\}$ a que correspondem as seguintes matrizes:

$$\text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(ii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Representa por extensão cada uma das relações.

(b) Indica quais as relações reflexivas, simétricas, anti-reflexivas, anti-simétricas e transitivas.

3.4 Considera as relações R e S, sobre o conjunto $\{1, 2, 3\}$, definidas pelas seguintes matrizes.

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determina, em forma matricial, as relações $R \cup S$, $R \cap S$, RS e SR.

3.5 Dá exemplos de:

(a) Relações R e S distintas tais que $RS = SR$;

(b) Uma relação R tal que $(\forall n)(n \in \mathbb{N}^+ \implies R^n = R^{n+1})$.

Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 3

3.6 Sejam R, S e T relações binárias em $\mathbb{R}$ definidas como

$$\begin{aligned} R &= \{\langle x, y\rangle \mid 64 < x^2 + y^2 \leq 100\}, \\ S &= \{\langle x, y\rangle \mid |y| \geq 8\}, \\ T &= \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

(a) Representa, geométricamente, as relações R, S, $R \cup S$, $R \cap S$ e $R \cap T$.

(b) Calcula, em extensão, os conjuntos

$$\{a \mid \langle 5, a\rangle \in R\},$$
$$\{a \mid \langle a, 5\rangle \in S\}.$$

3.7 Seja A um conjunto e $R, S, T \subseteq A^2$, seja S definida por

$$xSy \iff (xRy \wedge yRx)$$

e T definida por

$$xTy \iff (xRy \wedge \neg(yRx)).$$

(a) Mostra que S é simétrica e T anti-simétrica.

(b) Prova que $xRy \iff (xSy \vee xTy)$.

(c) Mostra que se R é transitiva, então S e T são também transitivas, mas que a implicação inversa não se verifica.

3.8 Seja $R = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,5\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 5,1\rangle, \langle 5,2\rangle, \langle 5,4\rangle\}$ uma relação em $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Desenha o grafo de R^+, ou seja o fecho transitivo de R.