Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 4

Indução

Exercícios

4.1 Mostra que a soma dos primeiros n naturais ímpares é n^2.

4.2 Mostra que, para todo o natural n, se tem

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3).$$

4.3 Mostra que se $R \subseteq A^2$ é simétrica, também R^+ é simétrica.

4.4 Encontra uma fórmula fechada para a soma

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

e demonstra a sua correcção usando indução finita.

4.5 Mostra que:

(a) Qualquer conjunto com cardinalidade $n \geq 2$ tem exactamente $\frac{1}{2}n(n-1)$ subconjuntos com exactamente dois elementos.

(b) Qualquer que seja o conjunto finito A, $|2^A| = 2^{|A|}$.

4.6 Para que valor de k se tem que para qualquer inteiro positivo n ($n \geq k$) $n! \geq n^2$. Prova, por indução, a resposta que encontrares.

4.7 Mostra as seguintes proposições no universo $\mathbb{N}$.

(a) $(\forall n)\left(\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1\right)$.

(b) $(\forall n)(n > 6 \implies 3^n < n!)$.

(c) $(\forall n)(n! < n^n)$.

4.8 Mostra que é possível pagar "selar" qualquer valor numa carta, não inferior a ¢20, com selos de valor ¢5 e ¢6.

4.9 Considera a seguinte função definida para $\mathbb{N}$:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{, se } n = 0; \\ 4f(n/2) & \text{, se } n \text{ for par;} \\ f(n-1) + 2n - 1 & \text{, se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

Mostra que $(\forall n)(f(n) = n^2)$.

Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 4

4.10 Considera a seguinte sucessão $(a_n)_{n\geq 1}$, definida recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 1, \\ a_2 & = & 2, \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3. \end{array}$$

Mostra que $(\forall n)(a_n < (\frac{7}{4})^n)$.

4.11 Prova a desigualdade de Bernoulli:

$$(\forall n)(\forall r)(n \in \mathbb{N} \wedge r \in \mathbb{R} \wedge r \geq -1 \implies (1+r)^n \geq 1 + rn).$$

4.12 Prova por indução

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1).2^{n+1} + 2,$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$

4.13 No problema da *Torre de Hanoi* é dada uma torre de n discos de diametro decrescente, colocada num de três pilares. O objectivo consistem em mover a torre para outro pilar, um disco de cada vez, *de modo a nunca colocar um disco de diâmetro sobre um de diâmetro menor.*

(a) Como resolver o problema?

(b) Encontra uma fórmula de recorrência para o número T_n de movimentos necessários resolver o problema de n discos.

(c) Tenta encontrar uma fórmula fechada para tal valor de T_n.

(d) Prova que tal formula está correcta.

⋆ **4.14** Considera a sucessão de Fibonacci definida como

$$\begin{array}{rcl} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_n & = & F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2. \end{array}$$

(a) Mostra que

$$(\forall n)(n \geq 1 \implies F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

(b) Mostra que

$$(\forall n)\left(F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right).$$