

Exercícios

5.1 Mostra que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

- (a) $3 \mid n^3 + 2n$,
- (b) $5 \mid n^5 - n$,
- (c) $8 \mid (2n - 1)^2 - 1$,
- (d) $9 \mid 4^n + 15n - 1$.

5.2 Mostra que, $(4^n + 15n - 1)(11^{m+2} + 12^{2m+1})$ é múltiplo de 1197, quaisquer que sejam $n, m \in \mathbb{N}$.

5.3 Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mostra que:

- (a) $a \mid b \wedge b \mid c \implies a \mid c$;
- (b) $a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid (nb + mc), \forall m, n$;
- (c) $a \mid b \wedge b \mid a \implies a = \pm b$;
- (d) $ac \mid bc \implies a \mid b$.

5.4 (a) Mostra que $\sqrt{2}$ é irracional.

(b) Mostra que \sqrt{n} é irracional, para qualquer n que não seja um quadrado de um inteiro.

5.5 Indica se é verdadeiro ou falso, justificando, se $a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$.

5.6 Mostra que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \mid (b + c) \wedge a \mid b \implies a \mid c$.

5.7 Para cada uma das seguintes proposições, dá uma prova ou um contra-exemplo, tomando $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$.

- (a) $a \mid b \wedge c \mid d \implies ac \mid bd$.
- (b) $a \mid b \wedge c \mid d \implies (a + c) \mid (b + d)$.
- (c) $a \mid b \implies a \mid bc (\forall c)$.
- (d) $m \neq 0 \implies (a \mid b \iff ma \mid mb)$.
- (e) $a \mid b \wedge a \mid c \implies a \mid (b + c)$.
- (f) Se a e b são quadrados de inteiros e $a \mid b$, então $\sqrt{a} \mid \sqrt{b}$.
- (g) $ab \mid cd \implies a \mid c \vee a \mid d$.
- (h) $10 \mid a^2 \implies 10 \mid a$.
- (i) $4 \mid a^4 \implies 4 \mid a$.

5.8 Qual o quociente e o resto das divisões seguintes:

- (a) 19 por 7;
- (b) 789 por 23;
- (c) -111 por 11;

Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 5

(d) 3 por 5.

5.9 Factoriza os seguintes inteiros:

(a) 1001,

(b) 1111,

(c) 729,

(d) $10!$.

5.10 Quais os inteiros positivos, menores que 30, que são coprimos com 30?

5.11 Mostra que se $(a, b) = 1$ então a equação

$$ax + by = c$$

tem sempre uma solução inteira para x e y . Mostra que a equação tem uma infinidade de soluções.