Estruturas Discretas (CC1001) - Folha de trabalho n. 6

Exercícios

6.1 Para $a, b \in \mathbb{Z}^+$, provar que, sendo $d = (a, b)$ se tem

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

6.2 Para $a, b, n \in \mathbb{Z}^+$, provar que $(na, nb) = n(a, b)$.

6.3 Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, provar

$$c = (a, b) \implies c^2 | ab.$$

6.4 Seja $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Prova que $(n, n+2) = 1$ ou 2.

(b) Quais os possíveis valores de $(n, n+3)$? E $(n, n+4)$?

(c) Se $k \in \mathbb{Z}^+$, que podemos dizer sobre $(n, n+k)$?

6.5 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^+$ com $a > b$ e $(a, b) = 1$. Provar que $(a - b, a + b) = 1$ ou 2.

6.6 Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$. Mostrar que se $(a, b) = 1$ então $a|bc \implies a|c$.

6.7 Mostrar que seja qual for $n \in \mathbb{Z}^+$ se $a > b$ então $(a, b) = (a - b, b)$.

6.8 Se alguém gastar €2490 em livros em que cada exemplar da colecção A custa €33 e cada exemplar da colecção B custa €29, quantos livros de cada colecção compra?

6.9 Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^+$, provar que existem $c, d \in \mathbb{Z}^+$ tais que $cd = a$ e $(c, d) = b$ se e só se $b^2 | a$.

6.10 Seja $A = \{0, 1\}$. Será que $\langle 2^A, \cup, \cap \rangle$ constitui um anel?

6.11 Considera $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ com as operações definidas como:

$$x \oplus y = x + y - 1 \qquad x \odot y = x + y - xy.$$

(a) Verifica as propriedades associativas e distributivas.

(b) $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ é um anel comutativo?

(c) $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ possui uma unidade?

(d) $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ é um domínio de integridade?

(e) $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$ é um corpo?

6.12 Considera $\langle \mathbb{Z}, \oplus, \odot \rangle$, com

$$x \oplus y = x + y - 7 \qquad x \odot y = x + y - 3xy.$$

A estrutura assim definida constitui um anel?

6.13 Seja $\langle \mathbb{Q}, \oplus, \odot \rangle$ com

$$a \oplus b = a + b - k \qquad a \odot b = a + b - \frac{ab}{m}$$

um corpo. Para cada uma das proposições que se seguem, determina valores de k e m, por forma que as mesmas sejam verdadeiras.

(a) O elemento zero do anel é o 3.

(b) O inverso aditivo de 6 é -9.

(c) O inverso multiplicativo de 2 é $\frac{1}{8}$.

6.14 Seja $A = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge i^2 = -1\}$, com

$$\begin{array}{rcl} (a+bi)+(c+di) & = & (a+c)+(b+d)i \\ (a+bi)(c+di) & = & (ac-bd)+(bc+ad)i. \end{array}$$

(a) Verificar que a estrutura assim definida é um domínio de integridade.

(b) Determinar quais os elementos inversíveis de A.

6.15 Mostrar que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é inversivel se e só se $ad - bc \neq 0$.

6.16 Mostra que $\mathbb{Z}_p$ é um corpo se e só se p é primo.